



I Giochi di Archimede - Gara del Biennio

4 dicembre 1996

La prova consiste di 20 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere (A), (B), (C), (D), (E).

Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.

Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.

Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento

Nome _____ Cognome _____ Classe _____

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	

Un ciclista che viaggia alla velocità costante di 5 m/s quanti chilometri percorre in 3 ore?

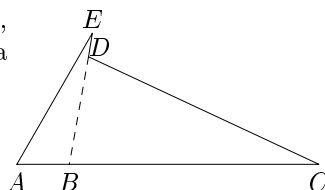
- (A) 15 km (B) 18 km (C) 50 km (D) 54 km
(E) nessuna delle precedenti.

Se in una città c'è un matematico ogni 320 abitanti, qual è la percentuale di matematici?

- (A) 3,2% (B) 0,32% (C) 3,125% (D) 0,3125% (E) nessuna delle precedenti.

Si sa che nella figura a fianco $\widehat{CAE} = 60^\circ$, $\widehat{AEB} = 20^\circ$, $\widehat{ACD} = 25^\circ$. I punti E, D, B sono allineati. Qual è la misura di \widehat{BDC} ?

- (A) 75° (B) 85° (C) 90° (D) 105°
(E) le informazioni sono insufficienti.

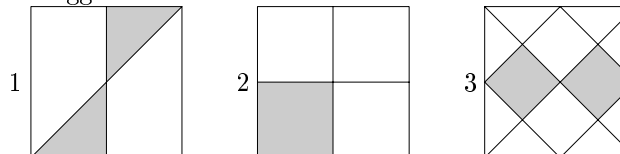


Un secchio pieno di sabbia pesa complessivamente 9 kg, riempito per metà di sabbia pesa 5 kg. Quanto pesa il secchio vuoto?

- (A) 0,5 kg (B) 1 kg (C) 2 kg (D) 2,5 kg
(E) il peso del secchio non può essere determinato.

- 5) Per cuocere il pesce sono necessari 15 minuti (fissi) per scaldare il forno, più 12 minuti di cottura per ogni 1/2 kg di pesce. Michele compra un branzino dal peso di 2,5 kg e vuole che sia cotto esattamente per le ore 20:00. A che ora Michele deve accendere il forno?
(A) 18:00 (B) 18:45 (C) 18:50 (D) 18:57 (E) 19:00.

- 6) I tre quadrati del disegno hanno lo stesso lato. In che rapporto stanno le aree delle tre figure ombreggiate?



- (A) La prima area è maggiore delle altre due
(B) la seconda area è maggiore delle altre due
(C) la terza area è maggiore delle altre due
(D) la prima area è uguale alla seconda, ed entrambe sono maggiori della terza
(E) le tre aree sono uguali.

- 7) Ieri non ho fatto colazione e sono andato a scuola, mentre l'altro ieri ho fatto colazione e sono andato a scuola. Quali delle frasi seguenti posso pronunciare senza essere bugiardo?

- (A) Quando faccio colazione non vado mai a scuola
(B) tutte le volte che vado a scuola non faccio colazione
(C) ogni volta che vado a scuola faccio colazione
(D) talvolta vado a scuola senza fare colazione
(E) quando non faccio colazione non vado mai a scuola.

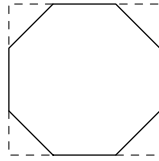
- 8) Nel rettangolo $ABCD$ (vertici indicati in senso antiorario), E ed F sono i punti medi dei lati maggiori AD e BC rispettivamente. Sapendo che $ABFE$ è simile a $ABCD$, quanto vale AD/AB ?

- (A) $\frac{7}{5}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{2}$
(E) le precedenti risposte sono tutte sbagliate.

- 9) Uno sprinter molto regolare quando corre i 100 metri impiega 2,4 secondi per i primi 20 metri e corre i restanti 80 m a velocità costante, concludendo la gara in 10 secondi netti. Se proseguisse per altri 100 m senza modificare la sua velocità che tempo otterrebbe sui 200 m?

- (A) 18,8 s (B) 19 s (C) 19,5 s (D) 19,6 s (E) 20 s.

Da un quadrato di lato 10 cm si tagliano i quattro angoli in modo da ottenere un ottagono regolare. Il lato dell'ottagono è lungo
(A) 4 cm **(B)** $10 \cdot (\sqrt{2} - 1)$ cm **(C)** $3\sqrt{2}$ cm **(D)** 5 cm
(E) le precedenti risposte sono tutte sbagliate.



Una partita di angurie del peso iniziale di 500 kg viene stoccata per una settimana in un magazzino. All'inizio la percentuale di acqua contenuta nelle angurie è il 99% del loro peso, alla fine dello stoccaggio, a causa dell'evaporazione, tale percentuale è scesa al 98%. Quanto pesano alla fine le angurie?

(A) 250 kg **(B)** 400 kg **(C)** 480 kg **(D)** 490 kg **(E)** 495 kg.

In un rombo di area 80 cm^2 , una diagonale è lunga il doppio dell'altra. Quanto è lungo il lato del rombo?

(A) 8 cm **(B)** $\sqrt{80}$ cm **(C)** 10 cm **(D)** 20 cm **(E)** non si può determinare.

Cinque persone non si trovano d'accordo sulla data.

- Carlo dice che oggi è lunedì 16 agosto
- Franco dice che oggi è martedì 16 agosto
- Marco dice che oggi è martedì 17 settembre
- Roberto dice che oggi è lunedì 17 agosto
- Tullio dice che oggi è lunedì 17 settembre.

Uno ha ragione, ma nessuno ha “completamente” torto, nel senso che ciascuno dice correttamente almeno una cosa (o il giorno della settimana, o il giorno del mese, o il mese). Chi ha ragione?

(A) Carlo **(B)** Franco **(C)** Marco **(D)** Roberto **(E)** Tullio.

Sia $m = 999 \dots 99$ il numero formato da 77 cifre tutte uguali a 9 e sia $n = 777 \dots 77$ il numero formato da 99 cifre tutte uguali a 7. Il numero delle cifre di $m \cdot n$ è

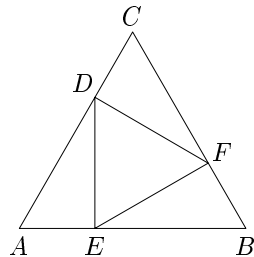
(A) 175 **(B)** 176 **(C)** 177 **(D)** 7692 **(E)** 7693.

Quattro squadre di pallacanestro di pari forza disputano un torneo con girone unico all'italiana (ogni squadra incontra ogni altra squadra una sola volta). Qual è la probabilità che ci sia una squadra che alla fine del torneo ha vinto tutte le sue partite? (le partite di pallacanestro non possono finire con un pareggio).

(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{\pi}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** $\frac{2}{3}$.

Sia ABC un triangolo equilatero e DEF un altro triangolo equilatero in esso inscritto con AB perpendicolare a ED . Il rapporto fra le aree di ABC e di DEF è

(A) $\sqrt{3}$ **(B)** 2 **(C)** $\frac{5}{2}$ **(D)** 3 **(E)** $3\sqrt{2}$.



17) Un pallone di cuoio è ottenuto cucendo 20 pezzi di cuoio a forma esagonale e 12 pezzi di cuoio a forma pentagonale. Una cucitura unisce i lati di due pezzi adiacenti. Allora il numero totale delle cuciture è

(A) 90 **(B)** 172 **(C)** 176 **(D)** 180

(E) i dati del problema sono insufficienti.

18) Quanti angoli maggiori di 90° può avere un quadrilatero (non intrecciato)?

(A) Ne ha sempre almeno uno

(B) ne ha al più uno

(C) ne ha al più due

(D) ne ha al più tre

(E) può averne quattro.

19) In una scatola vi sono quattro sacchetti: il primo sacchetto contiene 4 palline bianche e 3 nere, il secondo 2 palline bianche e 4 nere, il terzo 6 palline bianche e 9 nere, il quarto 5 palline bianche e 10 nere.

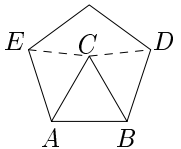
Si estrae un sacchetto a caso, e da questo, sempre a caso, si estrae una pallina. Sapendo che è stata estratta una pallina bianca, quale sacchetto è più probabile che sia stato scelto?

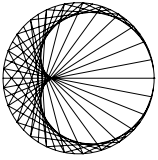
(A) Il primo **(B)** il secondo **(C)** il terzo **(D)** il quarto

(E) tutti i sacchetti hanno la stessa probabilità di essere stati estratti.

20) Nel pentagono regolare disegnato a fianco, il triangolo ABC è equilatero. Quanto vale l'angolo convesso \widehat{ECD} ?

(A) 120° **(B)** 144° **(C)** 150° **(D)** 168° **(E)** 170° .





I Giochi di Archimede - Soluzioni Biennio

4 dicembre 1996

D	D	A	B	B	E	D	E	C	B	A	C	D	B	D	D	A	D	A	D
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

- 1) La risposta è **(D)**.
In un'ora ci sono 3600 secondi, quindi in 3 ore il ciclista percorre $5 \cdot 3 \cdot 3600$ m, cioè 54 km.
- 2) La risposta è **(D)**.
Infatti si ha $\frac{1}{320} = 0,003125 = 0,3125\%$.
- 3) La risposta è **(A)**.
L'angolo $D\hat{B}C$, per il teorema dell'angolo esterno, vale

$$B\hat{A}E + A\hat{E}B = 60^\circ + 20^\circ = 80^\circ.$$

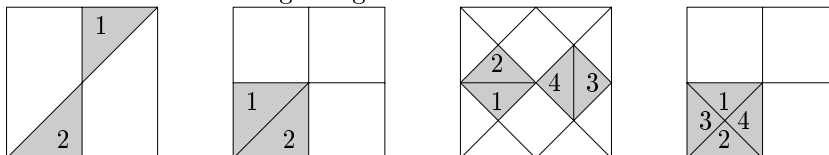
Ne segue che

$$B\hat{D}C = 180^\circ - D\hat{B}C - B\hat{C}D = 180^\circ - 80^\circ - 25^\circ = 75^\circ.$$

- 4) La risposta è **(B)**.
Sia x il peso del secchio vuoto e y il peso della sabbia. Si ha
- $$\begin{cases} x + y = 9 \\ x + \frac{y}{2} = 5 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad x=1 \text{ kg} \text{ e } y=8 \text{ kg.}$$
- 5) La risposta è **(B)**.
Il tempo di cottura per 2,5 kg di pesce è $12 \cdot \frac{2,5}{0,5} = 12 \cdot 5 = 60$ minuti. Il tempo totale necessario sarà 60+15 minuti, e quindi il forno deve essere acceso alle ore 18:45.
- 6) La risposta è **(E)**.
Supponendo che il lato dei quadrati misuri 2, si ottiene subito che:
- l'area della prima figura è $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$,
 - l'area della seconda figura è 1,
 - l'area della terza figura è $2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$.

SECONDA SOLUZIONE

La risposta è **(E)** come si deduce dal disegno seguente.

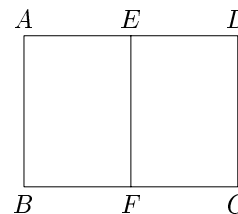


- 7) La risposta è **(D)**.
Infatti **(A)** e **(B)** sono in contraddizione con quello che è successo l'altro ieri; **(C)** e **(E)** sono in contraddizione con quanto è successo ieri. Invece la risposta **(D)** è compatibile con quanto si è verificato sia ieri che l'altro ieri.

8) La risposta è (E).

Dalla similitudine fra $ABCD$ e $ABFE$ si ricava $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{\frac{AD}{2}} = 2\frac{AB}{AD}$, da cui

$$\left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = 2 \text{ e quindi } \frac{AD}{AB} = \sqrt{2}.$$



9) La risposta è (C).

La velocità che l'atleta mantiene negli ultimi 80 m finali è data da $v = \frac{80}{10 - 2,4} \text{ m/s} = \frac{80}{7,6} \text{ m/s}$.

Pertanto per percorrere altri 100 metri alla stessa velocità, l'atleta impiega $100 \cdot \frac{7,6}{80} \text{ s} = \frac{76}{8} \text{ s} = 9,5 \text{ s}$. Il tempo complessivo per percorrere 200 m sarà allora 19,5 s.

10) La risposta è (B).

Indicata con x la lunghezza del lato dell'ottagono, si deve avere $x + 2\frac{x}{\sqrt{2}} = 10 \text{ cm}$, da cui $x = \frac{10}{1 + \sqrt{2}} = 10(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}$.

11) La risposta è (A).

La componente non acquosa delle angurie costituisce all'inizio l'1% del peso totale, e dunque è di 5 kg. Alla fine dello stoccaggio questi 5 kg rappresentano il 2% del peso totale, che quindi è di $\frac{5 \cdot 100}{2} = 250 \text{ kg}$.

12) La risposta è (C).

Indichiamo con d la diagonale minore del rombo e con $D = 2d$ la diagonale maggiore. L'area S del rombo è data da

$$S = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{2d \cdot d}{2} = d^2,$$

quindi $d = \sqrt{S} = \sqrt{80} \text{ cm}$ e $D = 2\sqrt{80} \text{ cm}$.

Il teorema di Pitagora permette di calcolare la lunghezza del lato l :

$$l = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{80}{4} + \frac{320}{4}} = \sqrt{20 + 80} = 10 \text{ cm}.$$

13) La risposta è (D).

Le affermazioni di Carlo e Marco non hanno alcun elemento in comune, pertanto se uno di loro avesse ragione, l'altro avrebbe "completamente" torto. Lo stesso dicasi delle affermazioni di Franco e Tullio. Dunque ha ragione Roberto, le cui affermazioni hanno almeno un elemento in comune con quelle degli amici.

D'altra parte, supponendo vera l'affermazione di Roberto, si verifica facilmente che ognuno degli altri ha detto qualcosa di vero.

14) La risposta è (B).

Si ha $m \cdot n = (m + 1) \cdot n - n$. Poiché il numero $(m + 1) \cdot n = 10^{77} \cdot n$ si ottiene aggiungendo 77 zeri ad n , esso ha $99 + 77 = 176$ cifre, la prima delle quali è 7. Sottraendo n , che ha un numero minore di cifre, la prima cifra può al massimo diminuire di uno, e quindi il numero di cifre non cambia.

SECONDA SOLUZIONE

Infatti, poichè $m < 10^{77}$ e $n < 10^{99}$, si ha $m \cdot n < 10^{77+99} = 10^{176}$ e quindi $m \cdot n$ ha non più di 176 cifre. D'altra parte, $m > 9 \cdot 10^{76}$, $n > 7 \cdot 10^{98}$, da cui $m \cdot n > 63 \cdot 10^{175}$, cioè $m \cdot n$ ha almeno 176 cifre.

15) La risposta è (D).

La probabilità che una singola squadra vinca tutte le sue partite (che sono tre) è evidentemente $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Poichè le squadre sono quattro, la probabilità che una di esse vinca tutte le sue partite (essendo impossibile che due squadre vincano tutte le partite) è $4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.

SECONDA SOLUZIONE

Dopo la prima giornata di gara due squadre hanno vinto le rispettive partite, nel successivo incontro tra queste due squadre, una di esse risulta vincitrice. Questa è l'unica squadra che può vincere tutte le sue partite, e questo accade solo se vince il suo terzo incontro, e quindi con probabilità pari a $\frac{1}{2}$.

16) La soluzione è (D).

Consideriamo i triangoli ADE e BEF . Essi sono uguali poiché $DE = EF$, $D\hat{A}E = E\hat{B}F$, $B\hat{E}F = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ = A\hat{D}E$.

Ne segue $AB = AE + EB = AE + AD = AE + 2 \cdot AE = 3 \cdot AE$ e di conseguenza

$$AB = 3 \cdot AE = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot DE = \sqrt{3} \cdot DE$$

e dunque il rapporto fra le aree dei due triangoli è 3.

17) La risposta è (A).

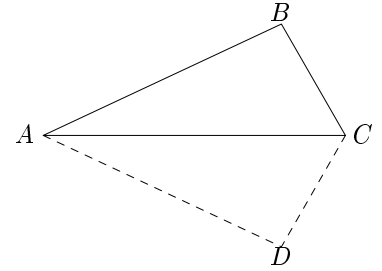
Infatti, contando il numero delle cuciture adiacenti agli esagoni ($6 \cdot 20 = 120$), più il numero delle cuciture adiacenti ai pentagoni ($5 \cdot 12 = 60$) e osservando che ogni cucitura viene contata due volte (perchè adiacente a due poligoni)

si ottiene $\frac{120 + 60}{2} = 90$.

18) La risposta è (D).

Infatti la somma degli angoli vale 360° , quindi almeno uno di essi deve essere minore o uguale a 90° . D'altra parte se si prende un triangolo ABC con gli angoli in A, B, C rispettivamente uguali a $25^\circ, 95^\circ, 60^\circ$ (ad esempio) e lo si ribalta rispetto al lato AC si ottiene un quadrilatero $ABCD$ che ha tre angoli ottusi.

Per verificare che anche la risposta (A) è sbagliata si pensi al caso del rettangolo.



19) La risposta è (A).

Indichiamo con p_1, p_2, p_3, p_4 la probabilità di estrarre una pallina bianca rispettivamente dal primo, dal secondo, dal terzo, dal quarto sacchetto. Si ha

$$p_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{7} \quad p_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \quad p_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{15} \quad p_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{15}$$

Poichè si sa che è stata estratta una pallina bianca, la probabilità che essa sia stata estratta dall' i -esimo sacchetto è pari a $\frac{p_i}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}$. Il sacchetto da cui è più probabile che sia stata estratta la pallina è dunque il primo; tale sacchetto non è altro che quello in cui maggiore è il rapporto tra il numero delle palline bianche e quello delle palline nere.

20) La risposta è (D).

Infatti gli angoli interni di un poligono regolare di n lati valgono $\frac{n-2}{n}180^\circ$, nel caso del pentagono si ha dunque

$E\hat{A}B = \frac{3}{5}180^\circ = 108^\circ$. Pertanto $E\hat{A}C = 108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$. Siccome il triangolo EAC è isoscele, l'angolo $E\hat{C}A$ vale $\frac{180^\circ - 48^\circ}{2} = 66^\circ$. Parimenti, per simmetria, si avrà $B\hat{C}D = 66^\circ$ e, concludendo,

$$E\hat{C}D = 360^\circ - E\hat{C}A - A\hat{C}B - B\hat{C}D = 360^\circ - 66^\circ - 60^\circ - 66^\circ = 168^\circ.$$