PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara del Triennio

4 dicembre 1996

La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento

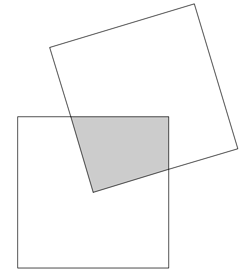
ne ____________________ *Cognome* ________________________ *Classe* ______

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Dati cinque interi consecutivi, cosa si può dire della cifra delle unità del loro prodotto?
(A) Può essere qualunque cifra
(B) può essere qualunque cifra pari
(C) può essere 0 oppure 5
(D) è sempre 0
(E) nessuna delle precedenti.

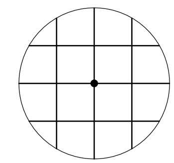
Un cane che sta in un punto A insegue una lepre che si trova, all'istante iniziale, 30 m avanti ad A. Il cane galoppa con falcate di 2 m, mentre la lepre fugge compiendo falcate di 1 m. Ogni 2 falcate del cane, la lepre ne compie 3. Dove il cane raggiungerà la lepre?
(A) A 30 m dal punto A
(B) a 60 m dal punto A
(C) a 120 m dal punto A
(D) a 600 m dal punto A
(E) il cane non raggiungerà mai la lepre.

3) Siano dati due quadrati di lato 10 cm, uno dei quali ha un vertice nel centro dell'altro. L'area della parte comune ai due quadrati misura
(A) 20 cm^2 **(B)** 25 cm^2 **(C)** 40 cm^2 **(D)** 50 cm^2
(E) dipende dalla posizione.



4) Lunedì ho acquistato delle azioni che martedì hanno perso il 10% del loro valore e mercoledì hanno guadagnato il 10% rispetto a martedì. Immediatamente ho venduto le mie azioni. Rispetto al prezzo iniziale il prezzo finale è
(A) lo stesso **(B)** diminuito dell'1% **(C)** aumentato dell'1%
(D) diminuito del 10% **(E)** aumentato del 10%.

5) Un oblò circolare di raggio 20 cm viene grigliato con delle sbarre in modo che i quattro quadrati al centro siano di lato 10 cm. La lunghezza complessiva delle sbarre è
(A) $80\sqrt{3}$ cm **(B)** $80(\sqrt{2}+1)$ cm **(C)** 200 cm
(D) $80(\sqrt{3}+1)$ cm **(E)** 210 cm.



6) Quanto vale il quadrato del quadrato del quadrato di 8?
(A) 2^8 **(B)** 8^4 **(C)** 8^6 **(D)** 8^8 **(E)** 2^{64}.

7) La somma dei reciproci delle radici di $ax^2+bx+c=0$ (ove $a,b,c\neq 0$) è
(A) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ **(B)** $\frac{b}{c}$ **(C)** $-\frac{c}{b}$ **(D)** $-\frac{a}{b}$ **(E)** $-\frac{b}{c}$.

8) Vicino ad una fonte vi è una cisterna di capacità superiore a 30 ettolitri, inizialmente vuota. Sono disponibili solo due recipienti calibrati, uno da 15 ed uno da 21 litri, con i quali è possibile aggiungere e togliere acqua dalla cisterna. Quale dei seguenti volumi di acqua non posso mettere esattamente nella cisterna?
(A) 3 litri **(B)** 5 litri **(C)** 6 litri **(D)** 645 litri
(E) posso ottenere tutti i precedenti.

9) Antonio è nato il 1° marzo di un anno che aveva 53 sabati e 53 domeniche. In che giorno della settimana è nato?
(A) lunedì **(B)** mercoledì **(C)** venerdì
(D) in un giorno diverso dai precedenti **(E)** non si può determinare con certezza.

10) Qual è la probabilità che il primo numero estratto sulla ruota di Firenze sia minore del primo numero estratto sulla ruota di Napoli? (Ricordiamo che al lotto si estraggono i numeri da 1 al 90).
(A) $\frac{44}{90}$ **(B)** $\frac{88}{179}$ **(C)** $\frac{44}{89}$ **(D)** $\frac{89}{180}$ **(E)** $\frac{1}{2}$.

Qual è la cifra delle unità di $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 1996^2$?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 8.

Sia D il dominio del piano cartesiano determinato dal sistema di disequazioni a fianco. Qual è l'area di D?
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 \geq 1 \end{cases}$$
(A) $\sqrt{2}\pi$ **(B)** $\frac{\pi}{2}$ **(C)** 2 **(D)** $\sqrt{2}$ **(E)** $4 - \pi$.

Sia X un insieme di numeri interi positivi. Si sa che X contiene almeno un elemento maggiore di 1 e che, tutte le volte che contiene un certo numero n, contiene anche tutti i numeri maggiori di n ad eccezione, eventualmente, dei multipli di n. Quale delle seguenti affermazioni è certamente corretta?
(A) X è un insieme finito
(B) l'insieme X e l'insieme degli interi positivi che non appartengono ad X sono entrambi infiniti
(C) X contiene tutti i numeri primi
(D) esiste un numero m tale che X contiene tutti gli interi maggiori di m
(E) X è uguale all'insieme di tutti gli interi positivi.

Quanti angoli maggiori di 90° può avere un quadrilatero (non intrecciato)?
(A) Ne ha sempre almeno uno
(B) ne ha al più uno
(C) ne ha al più due
(D) ne ha al più tre
(E) può averne quattro.

Se si sviluppa la superficie laterale di un cilindro retto si ottiene un rettangolo le cui diagonali sono lunghe l e formano un angolo di 30° con la base del rettangolo. Il volume del cilindro è
(A) $\frac{1}{16}\frac{l^3}{\pi}$ **(B)** $\frac{3}{8}l^3$ **(C)** $\frac{3}{4}l^3$ **(D)** $\frac{3}{32}\frac{l^3}{\pi}$
(E) le risposte precedenti sono tutte sbagliate.

Un mio amico ha scritto un numero segreto di quattro cifre usando una sola volta le cifre 1, 2, 3 e 4. Sapendo che nessuna cifra occupa il posto che corrisponde al proprio valore (cioè la prima cifra non è 1, la seconda non è 2, e così via), quale probabilità ho di indovinare il numero al primo tentativo?
(A) $\frac{1}{24}$ **(B)** $\frac{1}{9}$ **(C)** $\frac{1}{8}$ **(D)** $\frac{1}{81}$ **(E)** $\frac{1}{6}$.

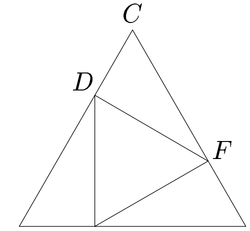
Un pallone di cuoio è ottenuto cucendo 20 pezzi di cuoio a forma esagonale e 12 pezzi di cuoio a forma pentagonale. Una cucitura unisce i lati di due pezzi adiacenti. Allora il numero totale delle cuciture è
(A) 90 **(B)** 172 **(C)** 176 **(D)** 180 **(E)** i dati del problema sono insufficienti.

18) Qual è la somma dei numeri contenuti nella tabella a fianco?

1	2	3	$\ldots$	n
2	3	4	$\ldots$	$n+1$
3	4	5	$\ldots$	$n+2$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
n	$n+1$	$n+2$	$\ldots$	$2n-1$

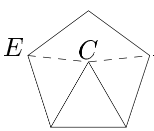
(A) $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ **(B)** $n + \frac{n(n+1)^2}{2}$
(C) n^3+n^2+n+1 **(D)** $n(2n-1)(n+1)$
(E) n^3.

19) Sia ABC un triangolo equilatero e DEF un altro triangolo equilatero in esso inscritto con AB perpendicolare a ED, il rapporto fra le aree di ABC e di DEF è
(A) $\sqrt{3}$ **(B)** 2 **(C)** $\frac{5}{2}$ **(D)** 3 **(E)** $3\sqrt{2}$.



20) Quante cifre ha il numero $(123456789)^6$?
(A) 16 **(B)** 48 **(C)** 49 **(D)** 50 **(E)** 54

21) Nel pentagono regolare disegnato a fianco, il triangolo ABC è equilatero. Quanto vale l'angolo convesso $E\widehat{C}D$?
(A) 120° **(B)** 144° **(C)** 150° **(D)** 168° **(E)** 170°.

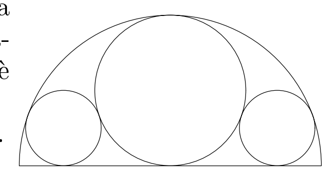


22) Ad un torneo di golf partecipano 256 concorrenti. Il torneo prevede che ad ogni turno partecipino 4 concorrenti: il vincitore passa al turno successivo mentre gli altri 3 concorrenti vengono eliminati. Quanti turni sono necessari per determinare il vincitore assoluto del torneo?
(A) 16 **(B)** 64 **(C)** 65 **(D)** 85 **(E)** 128

23) Consideriamo le frazioni con numeratore e denominatore positivi. Quale dei seguenti insiemi è finito?
(A) l'insieme delle frazioni minori di 100 con numeratore minore di 100
(B) l'insieme delle frazioni maggiori di 100 con denominatore maggiore di 100
(C) l'insieme delle frazioni minori di 100 con denominatore minore di 100
(D) l'insieme delle frazioni minori di 100 con numeratore maggiore di 100
(E) l'insieme delle frazioni maggiori di 100 con denominatore minore di 100.

24) Ho a disposizione cinque cifre uguali a 1 ed una cifra uguale a 2. Usando tutte o alcune di queste cifre, quanti numeri diversi posso costruire?
(A) 15 **(B)** 21 **(C)** 24 **(D)** 26 **(E)** 27.

25) Da un semicerchio di cartone di raggio 10 cm si ritaglia un cerchio di diametro massimo. Dai due tronconi rimasti si ritagliano due cerchi di diametro massimo. Qual è la percentuale di cartoncino sprecata?
(A) 10% **(B)** 20% **(C)** 25% **(D)** 30% **(E)** 50%.



I Giochi di Archimede - Soluzioni Triennio

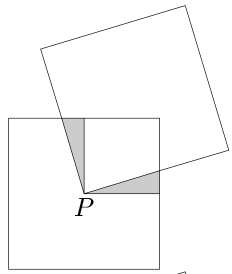
4 dicembre 1996

D	C	B	B	D	D	E	B	B	D	D	C	D	D	D	B	A	E	D	C	D	D	C	D	C
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

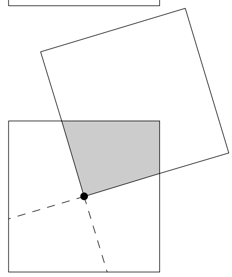
1) La risposta è **(D)**.
Infatti fra cinque interi consecutivi almeno uno è divisibile per 5, mentre almeno due sono pari. Dunque il prodotto è certamente divisibile per 10.

2) La risposta è **(C)**.
Due falcate del cane coprono $2 \cdot 2 = 4$ m, nello stesso tempo 3 falcate della lepre che scappa coprono $3 \cdot 1 = 3$ m. Dunque ogni volta che il cane percorre 4 m ne guadagna 1 sulla lepre, che quindi viene raggiunta in un punto che dista $\frac{4 \cdot 30}{1} = 120$ m dal punto A.

3) La risposta è **(B)**.
Se si conducono da P le parallele ai lati del quadrato, si vede che i due triangoli rettangoli ombreggiati sono uguali e quindi l'area della parte comune è quella del quadrato di lato 5 cm.



SECONDA SOLUZIONE
La risposta è **(B)** come si deduce facilmente dalla figura a fianco, in quanto i quadrilateri in cui viene suddiviso il primo quadrato sono uguali.



4) La risposta è **(B)**.
Se lunedì ogni azione valeva 100, martedì ne valeva 90 e mercoledì ho venduto a 99, perdendo dunque l'1%.

5) La risposta è **(D)**.
Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OAB si ricava

$$AB = \sqrt{20^2 - 10^2} \text{ cm} = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

Quattro delle sbarre hanno lunghezza $2 \cdot AB$ e due sbarre sono lunghe come il diametro del cerchio. Pertanto la lunghezza complessiva è

$$L = (40 + 40 + 4 \cdot 2 \cdot 10\sqrt{3}) \text{ cm} = 80(\sqrt{3} + 1) \text{ cm}$$

6) La risposta è **(D)**.
Si ha infatti $((8^2)^2)^2 = (8^4)^2 = 8^8$.

7) La risposta è **(E)**.
Se le radici sono r e s si ha $r + s = -\frac{b}{a}$ e $r \cdot s = \frac{c}{a}$, dunque

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{r+s}{r \cdot s} = \frac{-b/a}{c/a} = -\frac{b}{c}$$

8) La risposta è **(B)**.
Aggiungendo e togliendo volumi da 21 e 15 litri posso ottenere tutti e soli i volumi (positivi o nulli) del tipo $\pm m \cdot 21 \pm n \cdot 15$ con m, n interi. Poiché 21 e 15 sono divisibili per 3, ottengo soltanto volumi divisibili per 3, perciò non posso avere 5 litri. Si osservi che $3 = 3 \cdot 15 - 2 \cdot 21$ è un volume ottenibile, e quindi tutti i multipli di 3 lo sono.

9) La risposta è **(B)**.
Infatti, l'anno in cui è nato Antonio era bisestile, in quanto un anno non bisestile ha 52 settimane più un giorno e quindi ha un solo giorno della settimana che si ripete 53 volte. Inoltre in un anno bisestile i giorni che si ripetono 53 volte sono necessariamente il primo e il secondo giorno dell'anno. Allora il 1° gennaio era sabato e, contando che gennaio aveva 31 giorni e febbraio 29, il 1° marzo era mercoledì.

10) La risposta è **(D)**.
La probabilità che i due numeri siano uguali è pari a $\frac{1}{90}$, e quindi la probabilità che siano differenti è $\frac{89}{90}$. In tal caso la probabilità che il primo sia più piccolo del secondo è pari a quella che sia più grande, e quindi la probabilità cercata vale

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{89}{90} = \frac{89}{180} .$$

11) La risposta è **(D)**.
Infatti la cifra delle unità di $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2$ è 5 (verifica diretta), allo stesso modo si vede che $11^2 + 12^2 + \cdots + 20^2 = (10+1)^2 + (10+2)2 + \cdots + (10+10)^2 = 10 \cdot k \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2)$ ha 5 come cifra delle unità. Lo stesso per $21^2 + 22^2 + \cdots + 30^2$, eccetera. Inoltre la cifra delle unità di $1991^2 + \ldots + 1996^2$ è uguale a 1. Pertanto il risultato è uguale all'ultima cifra di $199 \cdot 5 + 1$, e cioè 6.

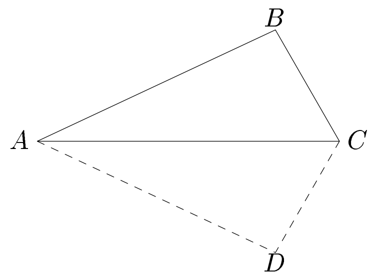
12) La risposta è **(C)**.
I punti di D sono infatti interni al cerchio di centro l'origine e raggio 1, ed esterni ai cerchi di centri $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ e di raggio 1. In altre parole D è costituito dai punti tratteggiati nella figura a fianco.

La suddetta figura può poi evidentemente essere "ritagliata e ricomposta" in modo da ottenere un quadrato, come mostrato nelle due figure a fianco.

L'area di tale quadrato è evidentemente 2.

13) La risposta è **(D)**.
Infatti, se $n > 1$ è un elemento di X, allora $n+1$ è maggiore di n ma non è multiplo di n e quindi appartiene ad X. Analogamente, tutti i numeri $n+2, n+3, \ldots$ appartengono ad X. Per quanto appena detto, **(A)** e **(B)** sono false. Inoltre l'insieme dei numeri interi maggiori di 10 fornisce un esempio di un insieme che soddisfa le proprietà richieste ma contraddice **(C)** ed **(E)**.

14) La risposta è **(D)**.
Infatti la somma degli angoli vale 360°, quindi almeno uno di essi deve essere minore o uguale a 90°. D'altra parte se si prende un triangolo ABC con gli angoli in A, B, C rispettivamente uguali a 25°, 95°, 60° (ad esempio) e lo si ribalta rispetto al lato AC si ottiene un quadrilatero $ABCD$ che ha tre angoli ottusi.
Per verificare che anche la risposta **(A)** è sbagliata si pensi al caso del rettangolo.



15) La risposta è **(D)**.
Si vede immediatamente che l'altezza h del rettangolo, e quindi quella del cilindro, è lunga $\frac{l}{2}$ e che la base è lunga $l\frac{\sqrt{3}}{2}$. Una circonferenza che è lunga $l\frac{\sqrt{3}}{2}$ ha raggio $r = l\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$, pertanto il volume del cilindro è

$$V = \pi r^2 h = \pi l^2 \frac{3}{16\pi^2}\frac{l}{2} = \frac{3}{32}\frac{l^3}{\pi}$$

16) La risposta è **(B)**.
Infatti i possibili numeri che ha pensato il mio amico sono: 2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312, 4321.

17) La risposta è **(A)**.
Infatti, contando il numero delle cuciture adiacenti agli esagoni ($6 \cdot 20 = 120$) più il numero delle cuciture adiacenti ai pentagoni ($5 \cdot 12 = 60$) ogni cucitura viene contata due volte, poiché essa è adiacente a due poligoni.

18) La risposta è **(E)**.
I numeri della prima riga hanno somma $\frac{n(n+1)}{2}$, quelli della seconda $\frac{n(n+3)}{2}$, ...quelli dell'ultima

$$\frac{n(2n-1+n)}{2} = \frac{n(3n-1)}{2} \ .$$

Pertanto la somma di tutti i numeri è

$$\frac{n}{2}\left((n+1)+(n+3)+(n+5)+\cdots+(3n-1)\right) = \frac{n}{2} \cdot n \cdot \frac{(n+1)+(3n-1)}{2} = n^3$$

SECONDA SOLUZIONE
Due numeri simmetrici rispetto alla diagonale formata da tutti n hanno per somma $2n$. Quindi la somma dei numeri della tabella è la stessa di quella che si ottiene con una tabella formata da tutti numeri uguali ad n, cioè $n \cdot n^2 = n^3$.

19) La risposta è **(D)**.
Consideriamo i triangoli ADE e BEF. Essi sono uguali poiché $DE = EF$, $D\widehat{A}E = E\widehat{B}F$, $B\widehat{E}F = 180° - 90° - 60° = 30° = A\widehat{D}E$.
Ne segue $AB = AE + EB = AE + AD = AE + 2 \cdot AE = 3 \cdot AE$ e di conseguenza

$$AB = 3 \cdot AE = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot DE = \sqrt{3} \cdot DE$$

e dunque il rapporto fra le aree dei due triangoli è 3.

20) La risposta è **(C)**.
Si ha $(123456789)^6 = (\alpha \cdot 10^8)^6 = \alpha^6 \cdot 10^{48}$, ove $\alpha = 1,23\ldots$; quindi $\alpha^2 < 2$, $\alpha^6 < 8$: pertanto il numero delle cifre è lo stesso di 10^{48}, cioè 49.

21) La risposta è **(D)**.
Infatti gli angoli interni di un poligono regolare di n lati valgono $\dfrac{n-2}{n}180°$, nel caso del pentagono si ha dunque $E\hat{A}B = \dfrac{3}{5}180° = 108°$. Pertanto $E\hat{A}C = 108° - 60° = 48°$. Siccome il triangolo EAC è isoscele, l'angolo $E\hat{C}A$ vale $\dfrac{180° - 48°}{2} = 66°$. Parimenti, per simmetria, si avrà $B\hat{C}D = 66°$ e, concludendo,

$$E\hat{C}D = 360° - E\hat{C}A - A\hat{C}B - B\hat{C}D = 360° - 66° - 60° - 66° = 168°.$$

22) La risposta è **(D)**.
Infatti per determinare il vincitore assoluto è necessario eliminare 255 concorrenti. Poiché ad ogni turno vengono eliminati 3 concorrenti, la risposta è $\frac{255}{3} = 85$.

23) La risposta è **(C)**.
Infatti, se $\dfrac{a}{b} < 100$ e $b < 100$ necessariamente si deve avere $a < 100 \cdot b < 10\,000$ e dunque le frazioni $\dfrac{a}{b}$ che verificano le condizioni richieste sono necessariamente meno di $100 \cdot 10\,000 = 1\,000\,000$.
Non è difficile mostrare che in tutti gli altri casi si hanno infinite frazioni: per il caso **(A)** le frazioni $\dfrac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ verificano le condizioni richieste; per il caso **(B)** si pensi alle frazioni del tipo $100n + \dfrac{1}{101}$, ovvero $\dfrac{10100n + 1}{101}$; per il caso **(D)** a $\dfrac{100 + n}{2n} = \dfrac{50}{n} + \dfrac{1}{2}$ e per il caso **(E)** a $\dfrac{100 + n}{1}$.

24) La risposta è **(D)**.
Infatti, utilizzando solo le cifre 1 posso costruire i 5 numeri 1, 11, 111, 1111, 11111. Utilizzando anche la cifra 2, posso costruire: un numero con una cifra (2), due numeri con due cifre (mettendo la cifra 2 al primo o al secondo posto), tre numeri di tre cifre, e così via, per un totale di $5 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 26$ numeri.

25) La risposta è **(C)**.
Chiamiamo R il raggio del semicerchio iniziale, ovviamente il primo cerchio tagliato ha raggio $R/2$. Se r è il raggio di uno degli ulteriori cerchi, si ha, dal teorema di Pitagora,

$$(C'N)^2 = (C'C)^2 - (CN)^2 = (C'O)^2 - (C'M)^2$$

cioè

$$\left(\frac{R}{2} + r\right)^2 - \left(\frac{R}{2} - r\right)^2 = (R - r)^2 - r^2$$

da cui si ricava $r = \dfrac{R}{4}$. Dunque l'area complessiva dei tre dischi tagliati è:

$$\pi\frac{R^2}{4} + 2\pi\frac{R^2}{16}$$

e dunque il rapporto con l'area del semicerchio iniziale, che vale $\dfrac{\pi R^2}{2}$, è $\dfrac{3}{4}$. Pertanto $\dfrac{1}{4}$ del cartoncino viene sprecato.