

I Giochi di Archimede - Gara del Biennio

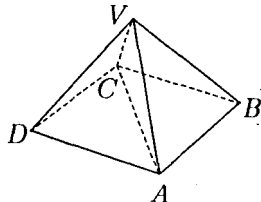
3 dicembre 1997

- La prova consiste di 20 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere (A), (B), (C), (D), (E).
- Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
- Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
- Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento

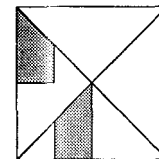
Nome _____ Cognome _____ Classe _____

I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	

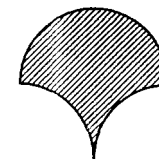
- Quanti alberi ci stanno al massimo su due lati di un largo viale lungo 180 metri, posti a 15 metri di distanza l'uno dall'altro?
(A) 20 (B) 22 (C) 24 (D) 26 (E) 28.
- Il contachilometri di una bicicletta segna 3733 km. La prima volta in cui segnerà nuovamente un numero con tre cifre uguali avverrà
(A) prima di 50 km (B) tra 50 km e 100 km (C) tra 100 km e 500 km
(D) tra 500 km e 1000 km (E) tra 1000 km e 5000 km.
- In una piramide $ABCDV$ la base $ABCD$ è un quadrato e le facce laterali sono triangoli equilateri. Il triangolo ACV è
(A) rettangolo
(B) ottusangolo
(C) equilatero
(D) equivalente alla base $ABCD$
(E) equivalente ad una faccia laterale.
- Uno studente ha avuto una media di 6 e $1/2$ nei primi quattro compiti. Quale voto deve prendere nel quinto per ottenere la media del 7?
(A) 7 e $1/2$ (B) 8 e $1/2$ (C) 9 (D) 10 (E) non ce la può fare.



- Quanto vale l'espressione $\left(0,1 + \frac{1}{0,1}\right)^2$?
(A) 0,0121 (B) 1,21 (C) 100,01 (D) 102,01 (E) 121.
- Qual è la percentuale del quadrato ombreggiata in figura?
(A) 12,5% (B) 16,66% (C) 18,75% (D) 20% (E) 25%.



- Quanti sono i numeri positivi n tali che $n + 30 > n^2$?
(A) infiniti (B) 30 (C) 6 (D) 5
(E) nessuna delle precedenti risposte è corretta.
- Marco e Roberto hanno una cioccolata formata da 8 quadretti di cui uno (quello in alto a sinistra) non è buono. Decidono allora di giocare a questo gioco. Ad ogni turno ogni giocatore spezza in due la cioccolata lungo una delle linee di separazione tra i quadretti, e poi si mangia la parte che non contiene il quadretto cattivo. Vince chi lascia all'avversario il solo quadretto cattivo. Sapendo che Roberto è il primo a giocare, cosa deve mangiare per essere sicuro della vittoria?
(A) 1 due quadretti più a destra
(B) i quattro quadretti più a destra
(C) i sei quadretti più a destra
(D) i quattro quadretti in basso
(E) qualunque mossa faccia, Roberto perde!
- Per incollare tra loro le facce di due cubetti unitari occorrono 0,25 grammi di colla. Quanta colla occorre per costruire un cubo $5 \times 5 \times 5$ a partire da 125 cubetti unitari? (N.B. per garantire maggiore solidità si incollano tutte le coppie di facce a contatto)
(A) 180 g (B) 150 g (C) 90 g (D) 75 g (E) 125 g.
- Determinare l'area della figura tratteggiata, sapendo che ciascuno degli archi (una semicirconferenza e due quarti di circonferenza) è ottenuto da una circonferenza di raggio 1 cm.
(A) $\pi/2$ cm² (B) 2 cm² (C) π cm² (D) 4 cm² (E) $27r$ cm².



- Da una lamiera di forma quadrata si taglia un cerchio del diametro massimo possibile, successivamente da tale cerchio si taglia un quadrato di lato massimo possibile. La percentuale di lamiera sprecata è
(A) $1/4$ della lamiera originale (B) $1/2$ della lamiera originale
(C) $1/2$ della lamiera circolare (D) della lamiera circolare
(E) nessuna delle precedenti.

12) Data la seguente equazione

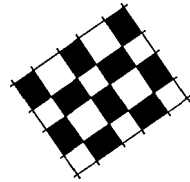
$$4 = \sqrt{7 + \sqrt{9 + \sqrt{4 + x}}}$$

quanto vale x ?

- (A) 36 (B) 46 (C) 56 (D) 68 (E) 5180.

13) In figura è rappresentato lo schema del pavimento di una grande sala. Le mattonelle quadrate sono bianche, mentre quelle rettangolari sono nere e misurano cm 30 x 40. Quanto vale il rapporto S_b/S_n fra la superficie totale bianca e quella nera?

- (A) $S_b/S_n < 95\%$
 (B) $95\% \leq S_b/S_n < 100\%$
 (C) $S_b/S_n = 100\%$
 (D) $100\% < S_b/S_n \leq 105\%$
 (E) $S_b/S_n > 105\%$.



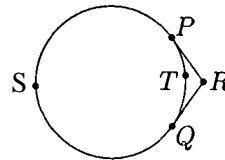
14) Dati due reali x e y tali che $0 < x < y < 1$, in quale intervallo si trova $x\sqrt{y}$?

- (A) Fra 0 e x
 (B) fra x e y
 (C) fra y e 1
 (D) dopo 1
 (E) dipende dai valori di x e y .

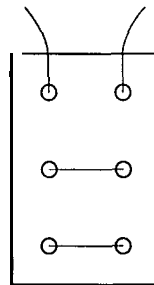
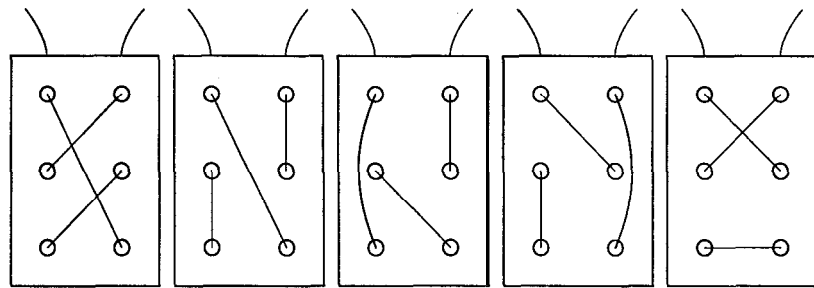


15) PR e QR sono tangenti al cerchio in figura. Sapendo che l'arco PSQ è quattro volte l'arco PTQ allora l'angolo PRQ è

- (A) 72" (B) 90" (C) 105" (D) 108" (E) 120".



16) Un unico pezzo di corda passa attraverso i fori di un foglio di cartone, come mostra la figura a fianco. Quale dei seguenti disegni non può essere ciò che si vede sull'altra faccia del cartone?



- (A) (B) (C) (D) (E)

17) Data una funzione tale che $f(x+1) = \frac{2f(x)+1}{2}$ e tale che $f(2) = 2$, quanto vale $f(1)$?

- (A) 0 (B) 1/2 (C) 1 (D) 3/2 (E) 2.

18) Sono state istituite 3 commissioni parlamentari formate da 10 membri ciascuna. Sappiamo che nessun parlamentare è membro simultaneamente di tutte e tre le commissioni. Dire qual è il minimo numero di persone coinvolte nelle 3 commissioni.

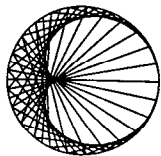
- (A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25 (E) 29.

19) Qual è la negazione della frase "Ogni studente della 1 A ha almeno 2 cugini"?

- (A) Nessuno studente della 1 A ha cugini
 (B) tutti gli studenti della 1 A hanno un cugino
 (C) almeno uno studente della 1 A ha un solo cugino
 (D) almeno uno studente della 1 A non ha cugini
 (E) nessuna delle precedenti è la negazione della frase data.

20) A una festa di compleanno quattro giocattoli vengono tirati a sorte fra i tre ragazzi presenti. I sorteggi sono indipendenti, ossia tutti i ragazzi partecipano a tutti i sorteggi. Qual è la probabilità p che vi sia almeno un ragazzo che resta privo di giocattoli?

- (A) $p = \frac{4}{9}$ (B) $\frac{4}{9} < p < \frac{1}{2}$ (C) $p = \frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2} < p < \frac{5}{9}$ (E) $p = \frac{5}{9}$.



I Giochi di Archimede - Soluzioni Biennio

3 dicembre 1997

D	A	A	C	D	C	D	B	D	B	B	E	D	A	D	E	D	B	E	E
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1) La risposta è (D).

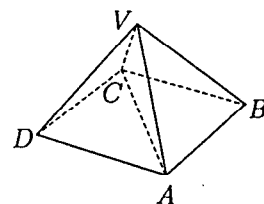
Su ogni lato infatti ci stanno al massimo 13 alberi: uno all'inizio e altri 12 a distanza di 15 m l'uno dall'altro. L'ultimo si troverà così esattamente alla fine del viale.

2) La risposta è (A).

La prima eventualità avverrà al km 3777. Non ci sono eventualità intermedie, perché fintanto che le prime due cifre del contachilometri sono 3 e 7, l'unica possibilità è che le altre due siano entrambe uguali a 3 o entrambe uguali a 7.

3) La risposta è (A).

I lati AV e CV , facendo parte delle facce laterali, sono uguali ai lati del quadrato, mentre AC è la diagonale del quadrato. Si noti anche che l'area di ACV è uguale a $\frac{1}{2}AB^2$ non è uguale né a quella del quadrato di base né a quella di una faccia laterale (triangolo equilatero di lato AB).



4) La risposta è (C).

Nei primi quattro compiti lo studente ha ottenuto $4 \cdot (6 + 1/2) = 26$ punti complessivi. Per avere la media del 7 deve totalizzare 35 punti. Nel quinto compito deve perciò ottenere 9.

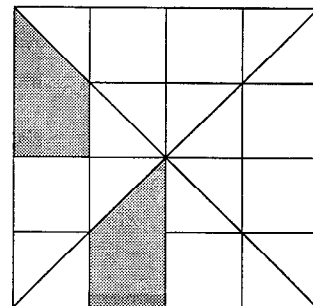
5) La risposta è (D).

Infatti

$$\left(0,1 + \frac{1}{0,1}\right)^2 = (0,1 + 10)^2 = 10^2 + 2 \cdot 0,1 \cdot 10 + 0,1^2 = 100 + 2 + 0,01 = 102,01.$$

6) La risposta è (C).

Suddividendo la figura come illustrato, si vede che la superficie ombreggiata è $3/16$ del totale. $3/16 = 0,1875 = 18,75\%$.



7) La risposta è (D).

Se consideriamo l'espressione $n^2 - n - 30$ possiamo vedere facilmente che è crescente al crescere di n se n è positivo (infatti $[(n+1)^2 - (n+1) - 30] - [n^2 - n - 30] = 2n$). Poiché per $n = 6$ si ha $n+30 = 36 = n^2$, i numeri che verificano la condizione richiesta sono quelli minori (strettamente) di 6.

- 8) La risposta è (B).



Infatti così facendo, Roberto viene a trovarsi in questa situazione:

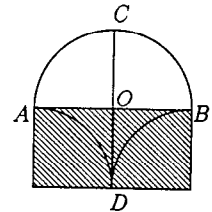
A questo punto, si vede che, qualunque mossa faccia Marco, Roberto vince alla mossa successiva. Inoltre, con ragionamenti simili, si verifica che invece le mosse (A), (C) e (D) sono perdenti per Roberto.

- 9) La risposta è (D).

Le facce sono in totale 900, quelle non incollate sono soltanto quelle esterne, il cui numero è pari alla superficie totale del cubo cioè 150. Pertanto ci sono 375 coppie di facce da incollare, e quindi occorrono 75 grammi di colla.

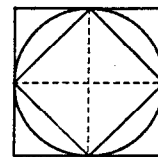
- 10) La risposta è (B).

È possibile tracciare due segmenti AB e CD fra loro perpendicolari (vedi figura) e traslare i due quarti di cerchio AOC e COB in modo da ottenere un rettangolo avente base 2 cm e altezza 1 cm.



- 11) La risposta è (B).

La soluzione risulta immediatamente dalla figura a fianco.



- 12) La risposta è (E).

Elevando ripetutamente al quadrato si ottiene:

$$16 = 7 + \sqrt{9 + \sqrt{4 + x}}$$

$$81 = 9 + \sqrt{4 + x}$$

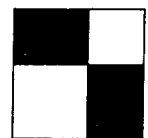
$$5184 = 4 + x$$

da cui $x = 5180$. La soluzione è certamente accettabile perché si sono sempre elevate al quadrato quantità positive.

- 13) La risposta è (D).

Il modulo-base della pavimentazione è rappresentato nella figura a fianco. Il rapporto S_b/S_n può essere calcolato considerando solamente le aree del modulo-base. Si ha:

$$\frac{S_b}{S_n} = \frac{40^2 + 30^2}{2 \times 40 \times 30} = \frac{25}{24}$$

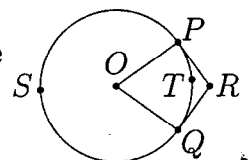


- 14) La risposta è (A).

Essendo $0 < y < 1$, allora sarà anche $0 < \sqrt{y} < 1$. Moltiplicando per x si ha che $0 < x\sqrt{y} < x$.

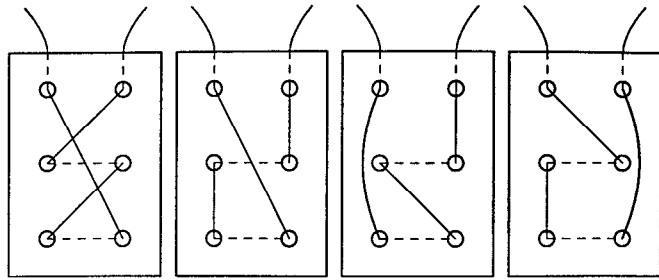
- 15) La risposta è (D).

Infatti l'angolo giro è pari a 5 volte \widehat{POQ} e quindi $\widehat{POQ} = \frac{1}{5}360^\circ = 72^\circ$. Siccome \widehat{OPR} e \widehat{OQR} sono retti si dovrà avere $\widehat{POQ} + \widehat{PRQ} = 180^\circ$, da cui $\widehat{PRQ} = 108^\circ$.



- 16) La risposta è (E).

Infatti, secondo il disegno (E) la corda non congiungerebbe la parte superiore del cartone (comprendente i 4 fori superiori) con la parte inferiore (comprendente i 2 fori inferiori) né dalla parte anteriore né da quella posteriore. Gli altri disegni sono invece tutti possibili, come mostrano i seguenti disegni.



17) La risposta è **(D)**.

Si ha infatti $f(2) = \frac{2f(1) + 1}{2}$ cioè $2 = \frac{2f(1) + 1}{2}$, da cui $4 = 2f(1) + 1$ ed infine $f(1) = \frac{3}{2}$.

18) La risposta è **(B)**.

Ogni parlamentare può assicurare al massimo 2 presenze, mentre il numero di presenze richieste è $3 \times 10 = 30$. Ci vogliono dunque almeno 15 parlamentari; 15 è proprio il numero minimo, perché può essere raggiunto con la seguente combinazione: 5 parlamentari membri della prima e della seconda commissione, 5 membri della prima e della terza commissione e 5 membri della seconda e della terza commissione.

19) La risposta è **(E)**.

La negazione della frase è "Almeno uno studente della I A ha al più un cugino". Osserviamo che tra una frase e la sua negazione una e soltanto una è vera. Le frasi **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)** non sono la negazione della frase del testo in quanto, per esempio, se nessuno studente della I A ha cugini sono false sia la frase del testo che **(B)** e **(C)**, mentre se tutti gli studenti della I A hanno esattamente un cugino sono false sia la frase del testo che **(A)** e **(D)**.

20) La risposta è **(E)**.

Un ragazzo resta privo di giocattoli se tutti e quattro i sorteggi lo escludono, e questo accade con probabilità $\left(\frac{2}{3}\right)^4$. Sommando le probabilità che ciascun ragazzo ha di restare privo di giocattoli si ottiene $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$, ma in questo modo si sono contati due volte i casi in cui due ragazzi sono restati entrambi privi di giocattoli (tutti i giocattoli sono andati al terzo). Questi casi hanno una probabilità uguale a $3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4$. La probabilità cercata è dunque

$$3 \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^4 - \left(\frac{1}{3}\right)^4 \right] = 3 \cdot \frac{15}{81} = \frac{5}{9}.$$