PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara del Biennio

2 dicembre 1998

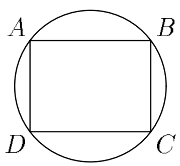
1) *La prova consiste di 20 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere* **(A)** , **(B)** , **(C)** , **(D)** , **(E)** .
2) *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
3) *Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia.* NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) *Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento*

Nome ________________ *Cognome* __________________ *Classe* _____

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1) $0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3$ è uguale a
(A) 0,9   0,27   **(C)** 0,027   **(D)** 0,009   **(E)** 0,0027.

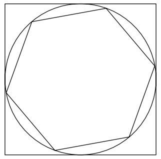
2) $ABCD$ è un rettangolo con $AB = 8$ cm e $BC = 6$ cm. Quanto vale l'area del cerchio circoscritto?
(A) 25π cm^2 **(B)** 24 cm^2 **(C)** 24π cm^2 **(D)** 50π cm^2
(E) nessuna delle precedenti.



3) Quale fra le seguenti espressioni rappresenta il quadrato del triplo del consecutivo di un numero intero n?
(A) $[3(n+1)]^2$ **(B)** $3n^2+1$ **(C)** $(3n+1)^2$ **(D)** $3(n^2+1)$ **(E)** $3(n+1)^2$.

4) In una classe ci sono 30 alunni. La maestra li divide in 5 squadre di 6 alunni e poi organizza una gara a squadre. Alla fine della gara distribuisce caramelle a tutti gli alunni, facendo in modo che ogni componente dell'unica squadra vincitrice riceva il doppio di caramelle rispetto agli alunni delle rimanenti squadre. Sapendo che in tutto la maestra distribuisce 540 caramelle, quante caramelle riceve ogni vincitore?
(A) 15   **(B)** 18   **(C)** 27   **(D)** 30   **(E)** 36.

5) Si consideri un quadrato di lato unitario; inscriviamo al suo interno una circonferenza e, all'interno di questa, un esagono regolare. Quanto misura il lato dell'esagono?
(A) $1/2$ **(B)** $\sqrt{3}/2$ **(C)** $\sqrt{3}/3$ **(D)** $(4\sqrt{2}-2)/7$ **(E)** $\pi/6$.



6) La produzione vinicola italiana rappresenta il 25% di quella mondiale ed il 38% di quella europea. Quale percentuale della produzione mondiale è rappresentata dalla produzione europea?
(A) Meno del 50%   **(B)** fra il 50% e il 60%   **(C)** fra il 60% e il 70%   **(D)** più del 70% **(E)** non si può determinare.

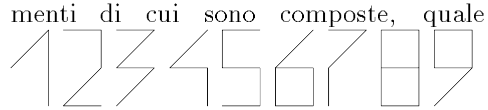
7) La città del mistero dista 500 km da Topolinia e 1200 km da Paperopoli. Qual è il minimo valore possibile per la distanza tra Topolinia e Paperopoli?
(A) 500 km   **(B)** 700 km   **(C)** 1200 km   **(D)** 1300 km   **(E)** 1700 km.

8) Se i numeri $0{,}3$; $0{,}\overline{3}$; $(0{,}\overline{3})^2$; $\frac{1}{0{,}3}$; $\frac{1}{0{,}\overline{3}}$ vengono messi in ordine crescente, il terzo numero è
(A) $0{,}3$ **(B)** $0{,}\overline{3}$ **(C)** $(0{,}\overline{3})^2$ **(D)** $\frac{1}{0{,}3}$ **(E)** $\frac{1}{0{,}\overline{3}}$.

9) Qual è il più piccolo intero di tre cifre divisibile per 3 e per 13?
(A) 102   **(B)** 104   **(C)** 117   **(D)** 139   **(E)** nessuno dei precedenti.

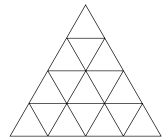
10) I raggi di tre sfere sono proporzionali a 1, 2, 3. Allora si ha che:
(A) il volume della sfera più grande è il triplo del volume della sfera più piccola
(B) la somma dei volumi delle due sfere più piccole è uguale al volume della sfera più grande
(C) il volume della sfera più grande è il triplo della somma dei volumi delle altre due
(D) la superficie della sfera più grande è uguale alla somma delle superfici delle altre due
(E) la superficie della sfera più grande è il triplo della somma delle superfici delle altre due.

11) Se ordiniamo le cifre seguenti secondo la somma delle lunghezze dei segmenti di cui sono composte, quale cifra occupa la posizione centrale?



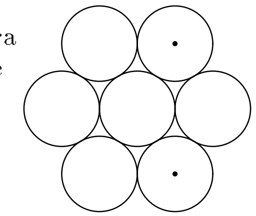
(A) Il 3   **(B)** il 2   **(C)** il 4   **(D)** ce n'è più di una
(E) nessuna delle precedenti.

12) Quanti triangoli equilateri sono presenti in questa figura?
(A) 16 **(B)** 20 **(C)** 25 **(D)** 26 **(E)** 27.



13) In una classe di 20 persone, 15 giocano a calcio, 14 a basket, 13 a pallavolo. Quanti sono, al minimo, coloro che praticano tutti e tre gli sport?
(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 7 **(D)** 9 **(E)** 13.

14) Sette cerchi di raggio unitario sono disposti come nella figura a fianco. La distanza fra i due centri indicati con un punto è
(A) 2 **(B)** $\sqrt{3}$ **(C)** 3 **(D)** $2\sqrt{3}$
(E) nessuna delle precedenti.



15) Quale dei seguenti numeri termina con il maggior numero di zeri?
(A) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$ **(B)** $2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2$ **(C)** $2^5 \cdot 5^3 \cdot 3^2$ **(D)** $4^5 \cdot 5^6 \cdot 6^4$ **(E)** $4^6 \cdot 6^5 \cdot 5^4$.

16) Platone amava particolarmente il dodecaedro regolare, che è un poliedro le cui facce sono 12 pentagoni regolari uguali. Quanti spigoli e quanti vertici ha tale poliedro?
(A) 20 spigoli e 20 vertici **(B)** 30 spigoli e 20 vertici **(C)** 20 spigoli e 30 vertici
(D) 30 spigoli e 60 vertici **(E)** 60 spigoli e 60 vertici.

17) Su un'isola vivono tre categorie di persone: i cavalieri, che dicono sempre la verità, i furfanti, che mentono sempre, ed i paggi che dopo una verità dicono sempre una menzogna e viceversa. Sull'isola incontro un vecchio, un ragazzo e una ragazza.
Il vecchio afferma: *"Io sono paggio"; "Il ragazzo è cavaliere"*.
Il ragazzo dice: *"Io sono cavaliere"; "La ragazza è paggio"*.
La ragazza afferma infine: *"Io sono furfante"; "Il vecchio è paggio"*.
Si può allora affermare che tra i tre:
(A) c'è esattamente un paggio **(B)** ci sono esattamente due paggi
(C) ci sono esattamente tre paggi **(D)** non c'è alcun paggio
(E) il numero dei paggi non è sicuro.

18) Un incallito giocatore paga 5000 lire per entrare in una casa da gioco, ove raddoppia i suoi soldi. Uscito, paga 5000 lire per il parcheggio dell'auto, ma – visto che la fortuna gli è propizia – entra in una seconda casa da gioco ad ingresso gratuito, ove nuovamente raddoppia il suo denaro. Dopo aver pagato nuovamente il parcheggio con 6000 lire, si accorge che non gli rimane più nulla nel portafogli. Quanti soldi aveva inizialmente il giocatore?
(A) 10 000 **(B)** 12 000 **(C)** 15 000 **(D)** i dati sono insufficienti
(E) le risposte precedenti sono tutte errate.

19) Sappiamo che $x = 0{,}9\ldots$ e che $1/x = 1{,}1\ldots$ (i puntini indicano che le ulteriori cifre decimali sono state omesse). Qual è la cifra che viene subito dopo il 9 nello sviluppo decimale di x?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 9 **(D)** non si può determinare univocamente
(E) nessuno dei precedenti.

20) Sapendo che tra 200 e 300 (estremi inclusi) ci sono esattamente 13 multipli dell'intero n, quanto vale n?
(A) ≤ 6 **(B)** 7 **(C)** 8 **(D)** 9 **(E)** ≥ 10.

I Giochi di Archimede - Soluzioni Biennio
2 dicembre 1998

C	A	A	D	A	C	B	B	C	C	A	E	B	D	D	B	C	E	A	C
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1) La risposta è **(C)**.
Infatti $0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3 = \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{27}{1000} = 0{,}027$.

2) La risposta è **(A)**.
La diagonale AC è anche un diametro del cerchio circoscritto.
Il quadrato della lunghezza di AC è uguale a

$$(64 + 36)\ \text{cm}^2 = 100\ \text{cm}^2$$

e l'area del cerchio è quindi uguale a

$$\pi(\frac{100}{4})\ \text{cm}^2 = 25\pi\ \text{cm}^2.$$

3) La risposta è **(A)**.
Invece:
(B) corrisponde al consecutivo del triplo del quadrato di n,
(C) è il quadrato del consecutivo del triplo di n;
(D)è il triplo del consecutivo del quadrato di n;
(E)è il triplo del quadrato del consecutivo di n.

4) La risposta è **(D)**.
Se ogni *perdente* riceve N caramelle e ogni *vincente* ne riceve $2N$, essendoci 6 *vincitori* e 24 *perdenti*, il totale delle caramelle distribuite deve essere $6 \times 2N + 24 \times N = 36N$. Ponendo $36N = 540$ si ha $N = 15$, quindi ogni *vincitore* riceve 30 caramelle.

5) La risposta è **(A)**.
Se il lato del quadrato è 1, il raggio della circonferenza inscritta in esso è $1/2$. Ricordando che il lato di un esagono inscritto in una circonferenza ha lunghezza pari al raggio, si ha la risposta.

6) La risposta è **(C)**.
Il 25% della produzione mondiale è pari al 38% della produzione europea. Quindi la produzione europea è il $\dfrac{25}{38} \times 100\%$ di quella mondiale, cioè circa il 65,8%

7) La risposta è **(B)**.
In ogni triangolo ABC la lunghezza di AB è maggiore o uguale alla lunghezza di BC meno la lunghezza di AC (supponendo $BC \geq AC$), ed è uguale a tale differenza solo se ABC sono allineati ed A si trova tra B e C.

8) La risposta è **(B)**.
Poiché $0{,}\overline{3} = \dfrac{1}{3}$ si ha $(0{,}\overline{3})^2 < 0{,}3 < 0{,}\overline{3}$, d'altra parte $0{,}\overline{3} < 1 < \dfrac{1}{0{,}\overline{3}} < \dfrac{1}{0{,}3}$.

9) La risposta è **(C)**.
Poiché 13 e 3 sono numeri primi, i loro multipli comuni devono essere multipli di $13 \cdot 3 = 39$. La tabellina del 39 inizia con $39, 78, 117, \ldots$

10) La risposta è **(C)**.
Il rapporto dei volumi di due sfere è uguale al cubo del rapporto dei rispettivi raggi.
I volumi delle sfere considerate sono dunque proporzionale a $1, 8, 27$, quindi si verifica facilmente che **(C)** è vera mentre le altre sono false (si ricordi che il rapporto delle superfici di due sfere è uguale al quadrato del rapporto dei rispettivi raggi).

11) La risposta è **(A)**.
Infatti, posta uguale a 1 la lunghezza dei tratti orizzontali e verticali, quelli obliqui hanno lunghezza $\sqrt{2}$. È dunque facile vedere che:

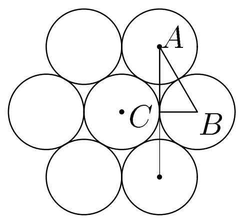
1,4 e 7	hanno lunghezza	$2+\sqrt{2}$
2	ha lunghezza	$3+\sqrt{2}$
3	ha lunghezza	$2+2\sqrt{2}$
5	ha lunghezza	5
6 e 9	hanno lunghezza	$4+\sqrt{2}$
8	ha lunghezza	7

pertanto 3 occupa il quinto posto nell'ordine per lunghezza.

12) La risposta è **(E)**.
Poniamo uguale a 1 il lato dei triangoli piú piccoli. Per ogni triangolo equilatero, chiamiamo semplicemente vertice del triangolo il vertice opposto al suo lato orizzontale. Allora ci sono:
- 16 triangoli di lato 1 (10 con il vertice in alto e 6 con il vertice in basso);
- 7 triangoli equilateri di lato 2, di cui 6 con il vertice in alto e 1 con il vertice in basso (il punto medio del lato inferiore della figura);
- 3 triangoli equilateri di lato 3 (tutti con il vertice in alto);
- 1 triangolo equilatero di lato 4 (la cornice dell'intera figura).

13) La risposta è **(B)**.
Infatti vi sono 5 persone che non giocano a calcio, 6 che non giocano a basket, 7 che non giocano a pallavolo: se sono tutte distinte, allora rimangono esattamente due persone che praticano tutti e tre gli sport. Ovviamente è possibile che qualcuno non giochi né a calcio né a basket, ecc.; in tal caso il numero delle persone che praticano tutti e tre gli sport aumenta.

14) La risposta è **(D)**.
I centri dei cerchi esterni sono i vertici di un esagono regolare di lato 2 nel triangolo ABC, l'angolo $A\hat{B}C$ vale 60^o, per cui $AC = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2$.



15) La risposta è **(D)**.
Contare il numero di zeri con cui termina un numero n significa vedere qual è la massima potenza di $10 = 2 \cdot 5$ per cui è divisibile n.
Si tratta dunque di vedere, qual è il minimo tra gli esponenti di 2 e di 5 nella fattorizzazione del numero n.
Per **(A)** e **(B)** è 2 ;
per **(C)** è 3 ;
per **(D)** è 6 ;
per **(E)** è 4 .

16) La risposta è **(B)**.
Infatti i lati dei poligoni sono complessivamente $12 \cdot 5 = 60$; siccome ogni spigolo del poliedro è comune a due facce, si determinano $\frac{60}{2} = 30$ spigoli del poliedro.
Nei vertici del poliedro non possono ovviamente confluire meno di tre facce, e neppure piú di tre (l'angolo al vertice di un pentagono regolare vale $\frac{5-3}{5}\,180^o = 108^o$ e $4 \cdot 108^o > 360^o$). Pertanto in ogni vertice confluiscono esattamente tre facce e quindi il numero di vertici è $\dfrac{60}{3} = 20$.

17) La risposta è **(C)**.
La ragazza è infatti sicuramente un paggio: non può essere un cavaliere (altrimenti la sua prima affermazione dovrebbe essere vera) e neppure un furfante (altrimenti la sua prima affermazione dovrebbe essere falsa). Quindi la prima affermazione della ragazza è falsa e la sua seconda affermazione deve essere vera, cioè il vecchio è un paggio. La prima affermazione del vecchio è quindi vera e la seconda deve essere falsa; quindi il ragazzo non è un cavaliere. Egli non può essere un furfante, altrimenti anche la seconda sua affermazione dovrebbe essere falsa, mentre si è visto che tale affermazione è vera. Quindi anche il ragazzo è paggio.

18) La risposta è **(E)**.
Siano x le lire che il giocatore ha inizialmente nel portafogli. Dopo aver pagato il parcheggio all'uscita della prima casa da gioco egli ha $2(x - 5000) - 5000$ lire
All'uscita della seconda casa da gioco egli ha $2(2x-15000)$ lire e siccome tale somma è esattamente quanto occorre per pagare il parcheggio, si ha $4x - 30000 = 6000$, da cui $x = 9000$ lire.

19) La risposta è **(A)**.
Poiché $\dfrac{1}{x} = 1{,}1 \ldots \geq \dfrac{11}{10}$, si ha $0{,}9 \leq x \leq \dfrac{10}{11} = 0{,}909\ldots$ e quindi la seconda cifra decimale è 0.

20) La risposta è **(C)**.
Sia $\alpha n \geq 200$ il primo multiplo e $(\alpha + 12)n \leq 300$ l'ultimo. Affinché non ce ne siano piú di 13 si deve avere che $\alpha n - n < 200$ e $(\alpha + 12)n + n > 300$. Le condizioni che n deve soddisfare sono allora:

- $\alpha n \geq 200$
- $(\alpha - 1)n < 200$
- $(\alpha + 12)n \leq 300$
- $(\alpha + 13)n > 300$

Sottraendo la prima disuguaglianza dalla terza si ottiene $12n \leq 100$, che implica $n \leq 8$.
Sottraendo la seconda disuguaglianza dalla quarta si ha $14n > 100$ cioè $n > 7$.
Segue che n deve essere uguale a 8.
I 13 numeri $200, 208, \ldots, 296$ sono tutti e soli i multipli di 8 tra 200 e 300 (estremi inclusi).