PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

2 dicembre 1998

1) *La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.*
2) *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
3) *Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia.* NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) *Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento*

Nome ________________ *Cognome* ____________________ *Classe* _____

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Se i numeri 0,3; $0,\overline{3}$; $(0,\overline{3})^2$; $\frac{1}{0,3}$; $\frac{1}{0,\overline{3}}$ vengono messi in ordine crescente, il terzo numero è
(A) 0,3 **(B)** $0,\overline{3}$ **(C)** $(0,\overline{3})^2$ **(D)** $\frac{1}{0,3}$ **(E)** $\frac{1}{0,\overline{3}}$.

2) La città del mistero dista 500 km da Topolinia e 1200 km da Paperopoli. Qual è il minimo valore possibile per la distanza tra Topolinia e Paperopoli?
(A) 500 km **(B)** 700 km **(C)** 1200 km **(D)** 1300 km **(E)** 1700 km.

3) Vi sono tre circonferenze tangenti esternamente a due a due. Esse hanno raggio uguale rispettivamente a 1, 2, 3. Il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo che ha per vertici i tre centri delle circonferenze è allora uguale a
(A) 2 **(B)** 2,5 **(C)** 3 **(D)** π **(E)** non è possibile determinarlo.

4) Si considerino i due numeri $x = \left(\sqrt{3}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ e $y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$. Si ha che
(A) $x = y$ **(B)** $x > y$ **(C)** $x < y$ **(D)** $x^2 - y^2 > 1$
(E) x ed y non si possono confrontare.

5) Un poligono regolare ha n lati e $4n$ diagonali. Quanto vale n?
(A) 8 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 11 **(E)** 12.

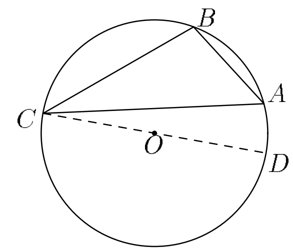
6) Sappiamo che una sola delle tre seguenti relazioni è vera: $x = 5$, $x > 5$, $x \leq 5$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?
(A) $x = 5$ **(B)** $x \neq 5$ **(C)** $x > 5$ **(D)** $x < 5$ **(E)** $x \geq 5$.

7) Due cerchi complanari di raggio 1 sono disposti in modo tale che la circonferenza di ognuno passa per il centro dell'altro. Qual è l'area dell'intersezione dei due cerchi?
(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(B)** $\frac{\sqrt{3}+\pi}{2}$ **(C)** $\frac{\pi}{2}$ **(D)** $\sqrt{3}$ **(E)** nessuna delle precedenti.

8) I numeri 1, 2, 3 e 4 vengono estratti da un'urna in un ordine qualsiasi. Qual è la probabilità che i primi 3 numeri estratti siano in ordine crescente?
(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{1}{8}$ **(E)** $\frac{1}{12}$.

9) In una classe ci sono 30 alunni. La maestra li divide in 5 squadre di 6 alunni e poi organizza una gara a squadre. Alla fine della gara distribuisce caramelle a tutti gli alunni, facendo in modo che ogni componente dell'unica squadra vincitrice riceva il doppio di caramelle rispetto agli alunni delle rimanenti squadre. Sapendo che in tutto la maestra distribuisce 540 caramelle, quante caramelle riceve ogni vincitore?
(A) 15 **(B)** 18 **(C)** 27 **(D)** 30 **(E)** 36.

10) Supponiamo che, nel cerchio in figura, l'angolo $B\hat{A}C$ sia di 35°. Sia CD il diametro passante per C, quanto vale $B\hat{C}D$?
(A) 35° **(B)** 45° **(C)** 50° **(D)** 55°
(E) nessuna delle precedenti.



11) Qual è la negazione di *"tutti i numeri perfetti sono pari"*? (Non è necessario sapere cos'è un numero perfetto.)
(A) Tutti i numeri perfetti sono dispari
(B) c'è almeno un numero perfetto dispari
(C) c'è almeno un numero pari che non è perfetto
(D) nessun numero dispari è perfetto
(E) nessun numero pari è perfetto.

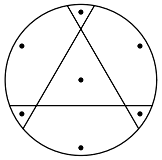
12) Segando un pezzo di legno a forma di parallelepipedo rettangolo si vuole estrarre un altro parellelepipedo di dimensioni 3 cm×4 cm×5 cm facendo tre tagli paralleli alle facce. Lavorando con la sega si può solo garantire che le dimensioni reali si discosteranno di al più 1 mm da quelle desiderate. Quanto si può discostare, al più, il volume del parallelepipedo costruito da quello del parallelepipedo desiderato?
(A) Circa 0,5 cm^3 **(B)** circa 1,2 cm^3 **(C)** circa 2 cm^3 **(D)** circa 2,4 cm^3
(E) circa 4,8 cm^3.

13) Qual è la probabilità che lanciando tre volte un dado la somma dei valori ottenuti sia minore o uguale a 5?
(A) Meno del 3% **(B)** tra 3% e 5% **(C)** tra 5% e 7% **(D)** tra 7% e 9%
(E) più del 9%.

14) Quale dei seguenti numeri termina con il maggior numero di zeri?
(A) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$ **(B)** $2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2$ **(C)** $2^5 \cdot 5^3 \cdot 3^2$ **(D)** $4^5 \cdot 5^6 \cdot 6^4$ **(E)** $4^6 \cdot 6^5 \cdot 5^4$.

15) Siano x e y numeri reali tali che $xy < x$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente falsa?
(A) $x^2y > x^2$ **(B)** $y \geq 1$ **(C)** $xy^2 > xy + 3$ **(D)** $xy^2 = xy$
(E) $x^2 + y^2 \leq 4(y-1)$.

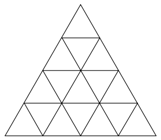
16) Antonio e Barbara compiono gli anni lo stesso giorno. Antonio compie 7 anni e, sistemando opportunamente le candeline, con tre tagli rettilinei può dividere la sua torta di compleanno in modo che ogni parte contenga esattamente una candelina (vedi figura a fianco). Barbara riesce a fare la stessa operazione con la sua torta facendo 4 tagli rettilinei, ma sa che il prossimo anno 4 tagli non basteranno più, comunque siano disposte le candeline. Quanti anni compie Barbara?
(A) 9 **(B)** 10 **(C)** 11 **(D)** 14 **(E)** 16.



17) Sia G il baricentro del triangolo ABC. Sapendo che $AB < AC < BC$, quale fra i triangoli GAB, GAC, GBC ha area massima?
(A) GAB **(B)** GAC **(C)** GBC **(D)** hanno tutti la stessa area
(E) dipende dalle lunghezze dei lati di ABC.

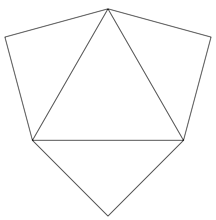
18) Qual è il più piccolo intero di cinque cifre divisibile per 3 e per 13?
(A) 10011 **(B)** 10020 **(C)** 10036 **(D)** 10062 **(E)** nessuno dei precedenti.

19) Quanti triangoli equilateri sono presenti in questa figura?
(A) 16 **(B)** 20 **(C)** 25 **(D)** 26 **(E)** 27.



20) Due matematici, Andrea e Sara, si incontrano una sera. Andrea dice "la somma delle cifre della mia età è uguale alla somma delle cifre della tua età", e Sara risponde "ma il prossimo anno la mia somma sarà il quadruplo della tua", al che Andrea ribatte "sì, ma fra due anni le nostre somme saranno nuovamente uguali". Tenuto conto che nessuno dei due ha ancora raggiunto i 100 anni, quanti anni ha Sara?
(A) Meno di 20 **(B)** tra 21 e 30 **(C)** tra 31 e 40 **(D)** più di 40
(E) non si può stabilire univocamente.

21) La figura a fianco è lo sviluppo di una piramide retta avente come base un triangolo equilatero di lato 1 e come facce laterali tre triangoli rettangoli isosceli uguali. Il volume della piramide è:
(A) $\frac{1}{24}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{24}$ **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{24}$ **(D)** $\frac{1}{12}$ **(E)** $\frac{\sqrt{5}}{24}$.



22) Su un'isola vivono tre categorie di persone: i cavalieri, che dicono sempre la verità, i furfanti, che mentono sempre, ed i paggi che dopo una verità dicono sempre una menzogna e viceversa. Sull'isola incontro un vecchio, un ragazzo e una ragazza.
Il vecchio afferma: *"Io sono paggio"; "Il ragazzo è cavaliere".*
Il ragazzo dice: *"Io sono cavaliere"; "La ragazza è paggio".*
La ragazza afferma infine: *"Io sono furfante"; "Il vecchio è paggio".*
Si può allora affermare che tra i tre:
(A) c'è esattamente un paggio **(B)** ci sono esattamente due paggi
(C) ci sono esattamente tre paggi **(D)** non c'è alcun paggio
(E) il numero dei paggi non è sicuro.

23) Quale fra le seguenti espressioni rappresenta la metà di 4^{1998}?
(A) 2^{1998} **(B)** 4^{1997} **(C)** 2^{999} **(D)** 4^{999} **(E)** 2^{3995}.

24) Sappiamo che $x = 0{,}9\ldots$ e che $1/x = 1{,}1\ldots$ (i puntini indicano che le ulteriori cifre decimali sono state omesse). Qual è la cifra che viene subito dopo il 9 nello sviluppo decimale di x?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 9 **(D)** non si può determinare univocamente
(E) nessuno dei precedenti.

25) Quale dei seguenti numeri NON divide 100! (ricordiamo che $100! = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$)?
(A) 1968 **(B)** 1988 **(C)** 1998 **(D)** 2008 **(E)** 2048.

I Giochi di Archimede - Soluzioni Triennio
2 dicembre 1998

B	B	B	B	D	B	E	C	D	D	B	E	B	D	E	C	D	E	E	C	B	C	E	A	D
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) La risposta è **(B)**.
Poiché $0{,}\overline{3} = \dfrac{1}{3}$ si ha $(0{,}\overline{3})^2 < 0{,}3 < 0{,}\overline{3}$, d'altra parte $0{,}\overline{3} < 1 < \dfrac{1}{0{,}\overline{3}} < \dfrac{1}{0{,}3}$.

2) La risposta è **(B)**.
In ogni triangolo ABC la lunghezza di AB è maggiore o uguale alla lunghezza di BC meno la lunghezza di AC (supponendo $BC \geq AC$), ed è uguale a tale differenza solo se ABC sono allineati ed A si trova tra B e C.

3) La risposta è **(B)**.
Unendo i centri di circonferenze tangenti esternamente, il segmento che si ottiene ha lunghezza pari alla somma dei raggi. Il triangolo che ha per vertici i centri delle circonferenze date ha quindi lati di lunghezza 3, 4, 5, ed è quindi un triangolo rettangolo. Ricordando che ogni triangolo rettangolo è inscrivibile in una circonferenza avente per diametro l'ipotenusa, si ha che il raggio richiesto è $5/2 = 2{,}5$.

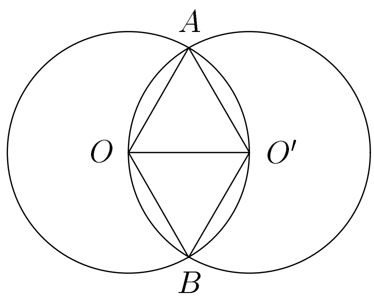
4) La risposta è **(B)**.
Ricordiamo che $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$; si ha quindi che $x = \left(\sqrt{3}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{3}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{3}^2 = 3$ e

$y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = \sqrt{2}^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \sqrt{2}^3 = \sqrt{8}$. Poiché $3^2 = 9 > 8$ si ha $x > y$, ma $x^2 - y^2 = 1$.

5) La risposta è **(D)**.
Poiché in un poligono convesso di n lati da ogni vertice escono $n-3$ diagonali, il numero totale delle diagonali è $\dfrac{n(n-3)}{2}$. Imponendo $\dfrac{n(n-3)}{2} = 4n$, si ottiene $n - 3 = 8$, da cui $n = 11$.

6) La risposta è **(B)**.
È impossibile che la prima relazione sia vera e le altre due siano entrambe false; se è vera solo la seconda si può concludere che $x > 5$, se è vera solo la terza (e le prime due sono false), si può concludere che $x < 5$. Poiché entrambe le soluzioni sono possibili, si può solo concludere che $x \neq 5$.

7) La risposta è **(E)**.
L'area dell'intersezione è data dall'area di due triangoli equilateri di lato 1 e dei 4 settori circolari come quello tratteggiato in figura. L'area di un settore si ottiene come differenza tra l'area della fetta $OO'A$ che è un $1/6$ dell'area del cerchio di raggio 1 e quello del triangolo equilatero di lato 1. Quindi si ha che l'area è uguale a



$$4\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + 2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

8) La risposta è **(C)**.
Indipendentemente dall'ultimo numero estratto, la probabilità che tre numeri compaiano in ordine crescente è uguale alla probabilità che il piú piccolo tra essi venga estratto per primo, uguale a $\frac{1}{3}$, moltiplicata per la probabilità che il piú piccolo fra gli altri due venga estratto per secondo, uguale a $\frac{1}{2}$.

Alternativamente si può osservare che le possibilità totali per i primi tre estratti sono $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ (cioè tutte le possibili terne ordinate di numeri da 1 a 4), mentre i casi favorevoli sono soltanto 4 (cioè le terne 123, 124, 134, 234). Quindi la probabilità è $\dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6}$.

9) La risposta è **(D)**.
Se ogni *perdente* riceve N caramelle e ogni *vincente* ne riceve $2N$, essendoci 6 *vincitori* e 24 *perdenti*, il totale delle caramelle distribuite deve essere $6 \times 2N + 24 \times N = 36N$. Ponendo $36N = 540$ si ha $N = 15$, quindi ogni *vincitore* riceve 30 caramelle.

10) La risposta è **(D)**
Infatti $C\hat{B}D = 90^o$ e $B\hat{D}C = 35^o$, in quanto insiste sullo stesso arco di di $B\hat{A}C$, pertanto $B\hat{C}D = 180^o - 90^o - 35^o = 55^o$.

11) La risposta è **(B)**.
Infatti la negazione della frase data è che non tutti i numeri perfetti sono pari, e quindi esiste almeno un numero perfetto che è dispari.

12) La risposta è **(E)**.
Il volume del parallelepipedo desiderato è di $3 \times 4 \times 5 = 60\,\text{cm}^3$. Il volume reale potrà variare da un minimo di $2{,}9 \times 3{,}9 \times 4{,}9 \approx 55{,}4\,\text{cm}^3$ ad un massimo di $3{,}1 \times 4{,}1 \times 5{,}1 \approx 64{,}8\text{cm}^3$.

Si osservi che lo scostamento massimo è dato dal volume di uno spessore applicato a tre facce del parallelepipedo desiderato di altezza 1 mm e che questo volume è, in prima approssimazione, il prodotto della metà della superficie laterale per l'altezza di 1 mm, e cioè $4{,}7\,\text{cm}^3$.

13) La risposta è **(B)**.
Si può effettuare un punteggio ≤ 5 solo con $1,1,1$ o $1,1,2$ o $1,1,3$ o $1,2,2$.
Mentre il primo risultato si può ottenere in modo unico, ognuno degli altri può essere ottenuto in tre modi diversi (ad esempio, per il risultato $1,1,2$, si può ottenere 2 al primo o al secondo o al terzo lancio).
Poiché i possibili risultati (ordinati!) lanciando tre dadi sono $6^3 = 216$, la probabilità cercata è uguale a

$$\frac{1+3+3+3}{216} = \frac{10}{216} \approx 0{,}046.$$

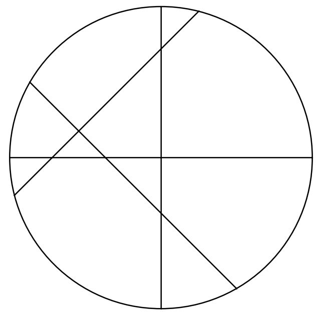
14) La risposta è **(D)**.
Contare il numero di zeri con cui termina un numero n significa vedere qual è la massima potenza di $10 = 2 \cdot 5$ per cui è divisibile n.
Si tratta dunque di vedere, qual è il minimo tra gli esponenti di 2 e di 5 nella fattorizzazione del numero n.
Per **(A)** e **(B)** è 2 ;
per **(C)** è 3 ;
per **(D)** è 6 ;
per **(E)** è 4 .

15) La risposta è **(E)**.
Infatti si ha che $x^2 + y^2 - 4(y-1) = x^2 + (y-2)^2$ è sempre ≥ 0, ed è zero solo se $x = 0$, $y = 2$, che non verificano l'ipotesi, dunque la **(E)** è sicuramente falsa se $xy < x$.
D'altra parte si osservi che le altre risposte possono essere vere per opportuni valori di x e y:
- **(A)** e **(B)** sono vere, ad esempio, per $x = -1$, $y = 2$
- **(C)** è vera ad esempio per $x = 1$, $y = -2$
- **(D)** è vera ad esempio per $x = 1$, $y = 0$.

16) La risposta è **(C)**.
Supponiamo di avere già effettuato $k - 1$ tagli. Il k-esimo taglio (che possiamo supporre diverso dai precedenti) incontrerà i precedenti in un certo numero h di punti distinti interni alla torta. Allora il k-esimo taglio attraverserà $h + 1$ parti distinte della torta, dividendo ciascuna di esse in due: l'effetto sarà dunque di aumentare il numero di parti della torta di una quantità pari a $h + 1$. D'altra parte, poiché due rette distinte si possono incontrare in al piú un punto, si ha che $h \leq k - 1$, e quindi con il k-esimo taglio il numero di parti della torta aumenterà di al piú k.
Partendo dalla situazione iniziale (1 sola parte), il numero di parti che si possono venire a creare con 4 tagli è al piú

$$1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 11.$$

D'altra parte la figura mostra come si possano ottenere 11 parti con 4 tagli.



17) La risposta è **(D)**.
Sappiamo che in ogni triangolo il baricentro divide ogni mediana in due segmenti che stanno tra loro nel rapporto $2 : 1$.
Ciò significa che l'altezza del triangolo GAB relativa al lato AB è $1/3$ dell'altezza del triangolo ABC relativa al lato AB, e dunque l'area del triangolo GAB è $1/3$ dell'area del triangolo ABC.
Lo stesso vale anche per i triangoli GBC e GCA.
Dunque GAB, GBC, GCA hanno la stessa area.

18) La risposta è **(E)**.
Il numero 10062 è, per verifica diretta, l'unico fra i numeri elencati divisibile sia per 3 che per 13. Non è però il piú piccolo numero di 5 cifre con questa proprietà, in quanto anche $10062 - 3 \cdot 13 = 10023$ la possiede.

19) La risposta è **(E)**.
Poniamo uguale a 1 il lato dei triangoli piú piccoli. Per ogni triangolo equilatero, chiamiamo semplicemente vertice del triangolo il vertice opposto al suo lato orizzontale. Allora ci sono:
- 16 triangoli di lato 1 (10 con il vertice in alto e 6 con il vertice in basso);
- 7 triangoli equilateri di lato 2, di cui 6 con il vertice in alto e 1 con il vertice in basso (il punto medio del lato inferiore della figura);
- 3 triangoli equilateri di lato 3 (tutti con il vertice in alto);
- 1 triangolo equilatero di lato 4 (la cornice dell'intera figura).

20) La risposta è **(C)**.
Affinché detto n un numero qualsiasi, la somma delle cifre di $n + 1$ non sia uguale alla somma delle cifre di n aumentata di 1 è necessario (e sufficiente) che l'ultima cifra di n sia 9. In tal caso la somma delle cifre di $n + 1$ è pari a quella delle cifre di n diminuita di 8. Sia x la somma delle

cifre dell'età di Andrea (e di Sara). Si deve allora avere:

$$4(x-8) = x+1, \text{ da cui}$$

$$3x = 33,$$

$$x = 11$$

Dunque l'età di Andrea è 29 anni, e l'età di Sara è di 38 anni.

21) La risposta è **(B)**.
Rimontando la piramide si ottiene che la sua altezza è un cateto di un triangolo rettangolo di cui:
- l'ipotenusa è l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele in figura;
- l'altro cateto è 1/3 dell'altezza del triangolo equilatero in figura.
L'altezza della piramide è quindi uguale a

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

e il suo volume è uguale a

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{24}.$$

22) La risposta è **(C)**.
La ragazza è infatti sicuramente un paggio: non può essere un cavaliere (altrimenti la sua prima affermazione dovrebbe essere vera) e neppure un furfante (altrimenti la sua prima affermazione dovrebbe essere falsa). Quindi la prima affermazione della ragazza è falsa e la sua seconda affermazione deve essere vera, cioè il vecchio è un paggio. La prima affermazione del vecchio è quindi vera e la seconda deve essere falsa; quindi il ragazzo non è un cavaliere. Egli non può essere un furfante, altrimenti anche la seconda sua affermazione dovrebbe essere falsa, mentre si è visto che tale affermazione è vera. Quindi anche il ragazzo è paggio.

23) La risposta è **(E)**.
Infatti si ha $\dfrac{4^{1998}}{2} = 2^{1998 \cdot 2 - 1} = 2^{3995}$.

24) La risposta è **(A)**.
Poiché $\dfrac{1}{x} = 1{,}1\ldots \geq \dfrac{11}{10}$, si ha $0{,}9 \leq x \leq \dfrac{10}{11} = 0{,}909\ldots$ e quindi la seconda cifra decimale è 0.

25) La risposta è **(D)**.
Fattorizziamo i 5 numeri:

$$1968 = 2^4 \cdot 3 \cdot 41 \quad 1988 = 2^2 \cdot 7 \cdot 41 \quad 1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37 \quad 2008 = 2^3 \cdot 251 \quad 2048 = 2^{11}$$

da cui:

$$1968 = 3 \cdot 16 \cdot 41 \quad 1988 = 4 \cdot 7 \cdot 41 \quad 1998 = 2 \cdot 27 \cdot 37 \quad 2048 = 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 32$$

dividono 100!, mentre 2008 non può dividere 100! perché allora il primo 251 lo dividerebbe, ma 251, essendo maggiore di 100, non può essere fattore di nessun numero tra 1 e 100.