

# I Giochi di Archimede - Gara del Biennio

1 dicembre 1999

La prova consiste di 20 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere (A), (B), (C), (D), (E).

Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.

Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.

Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento!

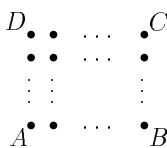
Nome \_\_\_\_\_ Cognome \_\_\_\_\_ Classe \_\_\_\_\_

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	

I  $\frac{4}{5}$  degli alunni di una classe sono stati promossi senza debiti formativi. Sapendo che gli alunni promossi con debito formativo sono  $\frac{1}{6}$  dei promossi senza debiti, la frazione dei non promossi (rispetto all'intera classe)  
(A) è  $\frac{1}{8}$  (B) è  $\frac{1}{10}$  (C) è  $\frac{1}{12}$  (D) è  $\frac{1}{15}$  (E) non è determinabile.

Quanto vale  $(12,5 \cdot 10^{-3}) \cdot (8 \cdot 10^{111})$ ?  
(A)  $10^{110}$  (B)  $1^{110}$  (C)  $10^{37}$  (D)  $100 \cdot 10^{-333}$  (E)  $1000^{108}$ .

In un frutteto rettangolare c'è un albero ogni 4 metri (come in figura). Sapendo che ci sono 35 alberi, quanto misura il perimetro del rettangolo che ha per vertici i punti in cui ci sono gli alberi A, B, C, D?  
(A) 70 (B) 80 (C) 96 (D) 140  
(E) non si può determinare univocamente.



Quale numero diverso da 0 è tale che la sua decima parte eguagli dieci volte il quadrato del numero stesso?

(A)  $\frac{1}{100}$  (B)  $\frac{1}{10}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D) 1 (E) 10.

5) Carlo e Ida hanno un appuntamento alle 7 del pomeriggio sotto la torre dell'orologio. Carlo arriva in orario e quando Ida arriva è la terza volta che Carlo vede le lancette della torre dell'orologio perpendicolari tra loro. Con che ritardo è arrivata Ida?  
(A) Meno di 1 ora e 10 minuti (B) tra 1 ora e 10 e 1 ora e 15  
(C) tra 1 ora e 15 e 1 ora e 20 (D) tra 1 ora e 20 e 1 ora e 25  
(E) più di 1 ora e 25.

6) Sia  $MNOPQ$  un pentagono in cui  $QM = NO = 8$  cm,  $PQ = 5$  cm,  $OP = 12$  cm e gli angoli in  $M, N$  e  $P$  sono retti. Quanto vale il perimetro del pentagono?  
(A) 33 cm (B) 40 cm (C) 46 cm (D) 47 cm (E) 50 cm.

7) Qual è la cifra delle unità di  $1999^{1999}$ ?  
(A) 1 (B) 3 (C) 7 (D) 9 (E) nessuna delle precedenti.

8) "In ogni scuola c'è almeno una classe in cui sono tutti promossi". Volendo negare questa affermazione, quale dei seguenti enunciati sceglieresti?  
(A) "In ogni scuola c'è almeno una classe in cui sono tutti bocciati"  
(B) "In ogni scuola c'è almeno un bocciato in tutte le classi"  
(C) "C'è almeno una scuola che ha almeno un bocciato in ogni classe"  
(D) "C'è almeno una scuola che ha dei promossi in ogni classe"  
(E) "C'è almeno una scuola in cui c'è una classe che ha almeno un bocciato".

9) In ogni ruota del lotto ci sono 90 numeri. Cinque di essi vengono estratti, uno alla volta, senza rimettere i numeri estratti nell'urna. In una certa ruota viene estratto per primo il numero 27. La probabilità che il secondo estratto sia 28  
(A) è  $\frac{1}{90}$  (B) è  $\frac{1}{89}$  (C) è  $\frac{1}{18}$   
(D) è minore di  $\frac{1}{100}$ , perché è improbabile che vengano estratti due numeri consecutivi  
(E) non si può determinare perché occorre calcolare la probabilità della cinquina.

10) Attorno a una villa a pianta quadrata di 30 metri di lato posta al centro di una vasta radura si estende un giardino che è composto da tutti i punti che distano meno di 100 metri dalla villa. L'estensione del giardino è  
(A) inferiore a 2 ettari (B) fra 2 e 3 ettari (C) fra 3 e 4 ettari  
(D) fra 4 e 5 ettari (E) superiore a 5 ettari.  
(si ricorda che 1 ettaro corrisponde a 10 000 m<sup>2</sup>)

11) Un orologio digitale a 4 cifre indica l'ora da 00:00 a 23:59. Per quanti minuti durante la giornata il numero che indica le ore ed il numero che indica i minuti sono entrambi quadrati perfetti (si ricorda che 0 è un quadrato perfetto)?  
(A) 25 (B) 28 (C) 32 (D) 35 (E) 40.

) Sia  $b$  un numero intero diverso da 0. Se  $a$  è il triplo di  $b$  e  $c$  è il doppio di  $b$ , qual è il rapporto tra  $2a$  e  $3c$ ?

- (A) 1 (B)  $\frac{2}{3}$  (C)  $\frac{3}{2}$  (D)  $\frac{1}{9}$  (E)  $\frac{4}{9}$ .

) Giovanni possiede un campo quadrato il cui lato misura un numero intero di metri e la cui area (espressa in  $m^2$ ) è un numero compreso tra 1900 e 2000. Giovanni decide di dividere il campo in parti uguali tra i suoi due figli. Ciascun figlio riceverà un numero di metri quadri compreso tra

- (A) 950 e 960 (B) 960 e 970 (C) 970 e 980 (D) 980 e 990 (E) 990 e 1000.

) Supponiamo di scrivere in ordine alfabetico (in italiano) i nomi degli interi tra 1 e 100 (estremi compresi). Quanto fa la somma del primo e dell'ultimo?

- (A) 6 (B) 70 (C) 71 (D) 101 (E) 121.

) In un quadrato magico, la somma dei numeri di ogni riga, di ogni colonna e delle due diagonali è costante. Nel quadrato magico a fianco quanto vale  $a + b + c$ ?

16	2	$a$
$c$	10	$d$
$b$	$e$	4

- (A) 20 (B) 22 (C) 26 (D) 44 (E) 48.

) Qual è la probabilità che, estratti due numeri interi a caso (anche uguali) compresi fra 1 e 12 (estremi inclusi), il loro prodotto sia multiplo di 5?

- (A)  $\frac{1}{5}$  (B)  $\frac{11}{36}$  (C)  $\frac{5}{24}$  (D)  $\frac{1}{4}$  (E) nessuna delle precedenti.

) Considerando i sei piani delle facce di un cubo, quante coppie di piani perpendicolari tra loro si possono trovare?

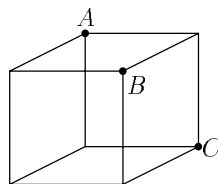
- (A) 3 (B) 6 (C) 8 (D) 12 (E) 24.

) Un comune vuole illuminare tre strade parallele lunghe rispettivamente 150 m, 210 m e 300 m con dei lampioni posti ad intervalli regolari sui due lati di ogni strada. Inoltre il comune vuole che la distanza fra due lampioni consecutivi sia la stessa in tutte e tre le strade, e che sia all'inizio sia alla fine di ogni strada ci siano due lampioni (uno per lato). Il minimo numero di lampioni occorrenti è

- (A) 25 (B) 44 (C) 50 (D) 80 (E) 94.

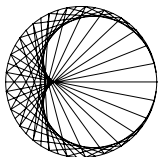
) Dato il cubo in figura, con gli spigoli di lato 1, lo si tagli lungo il piano  $ABC$ . Qual è il volume della parte più piccola così ottenuta?

- (A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{1}{4}$  (C)  $\frac{1}{6}$  (D)  $\frac{1}{8}$  (E)  $\frac{1}{12}$ .



) Sia  $n$  il più piccolo numero intero positivo divisibile per 20 e tale che la somma delle sue cifre sia divisibile per 1999. Quante cifre ha  $n$ ?

- (A) Meno di 222 (B) 222 (C) 223 (D) 224 (E) più di 224.



# I Giochi di Archimede - Soluzioni Biennio

1 dicembre 1999

D	A	B	A	E	C	D	C	B	D	E	A	B	E	C	B	D	C	C	D
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

- 1) La risposta è (D).

La frazione richiesta è infatti ottenibile togliendo da 1 (che rappresenta la totalità degli alunni) la frazione degli alunni pienamente promossi e quella degli alunni promossi con debiti. Si ottiene quindi

$$1 - \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} = 1 - \frac{4}{5} - \frac{2}{15} = \frac{1}{15}$$

- 2) La risposta è (A).

$$(12,5 \cdot 10^{-3}) \cdot (8 \cdot 10^{111}) = (12,5 \cdot 8) \cdot (10^{-3} \cdot 10^{111}) = 100 \cdot 10^{-3+111} = 10^2 \cdot 10^{108} = 10^{110}.$$

- 3) La risposta è (B).

Infatti  $35 = 7 \times 5$ , quindi i lati sono lunghi 24 m e 16 m e il perimetro è  $(16+24+16+24)$  m = 80 m.

- 4) La risposta è (A).

Chiamiamo  $x$  il numero cercato. Esso risolve l'equazione  $x/10 = 10 \cdot x^2$ , le cui soluzioni sono 0 e  $1/100$ . Dato che  $x \neq 0$  si ha  $x = 1/100$ .

- 5) La risposta è (E).

Tracciamo sul quadrante della torre un segmento che congiunge il centro con la tacca delle 12 e misuriamo in senso orario gli angoli formati dalle lancette con il segmento stesso. Se da mezzogiorno in punto sono passate  $x$  ore e  $y$  minuti allora l'angolo formato dalla lancetta dei minuti col segmento misura  $6y$  gradi, mentre quello formato dalla lancetta delle ore misura  $30x + y/2$ . Le due lancette sono perpendicolari tra loro se e solo se  $(30x + y/2) - 6y = 90$  oppure  $6y - (30x + y/2) = 90$ . Perciò tra le 7 in punto e le 7 e 59 minuti le lancette dell'orologio sono perpendicolari per due volte; a questo punto dobbiamo solo vedere quando saranno perpendicolari la prima volta dopo le 8, cioè ci basterà risolvere

$$30 \cdot 8 + y/2 - 6y = 90.$$

Dall'equazione otteniamo  $y = [(30 \cdot 8 - 90) \cdot 2]/11 = 60 \cdot 5/11 > 25$ .

## SECONDA SOLUZIONE

Ad ogni istante le due lancette formeranno tra loro due angoli: misuriamoli in gradi e chiamiamo  $\gamma$  il minimo tra i due numeri ottenuti. Tra le 7.00 e le 8.00 le lancette dell'orologio sono perpendicolari tra loro due volte: infatti alle 7.00  $\gamma$  è un numero maggiore di 90 e minore di 180; cresce fino a che le due lancette non sono una opposta all'altra; diminuisce fino a che non si sovrappongono; infine aumenta e, alle 8.00, è un numero maggiore di 90. Ne deduciamo che  $\gamma$  vale 90 solo due volte. Un discorso analogo si può fare anche dalle 8.00 alle 9.00 e, poiché in tal caso la lancetta delle ore sarà sempre oltre la quarantesima tacca dei minuti, tra le 8.00 e le 8.25  $\gamma$  sarà sempre maggiore di 90.

6) La risposta è (C).

Infatti per il teorema di Pitagora il segmento  $OQ$  è uguale a  $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ ; inoltre  $MNOQ$  è un rettangolo, per cui  $MN = OQ = 13$ . Si ricava quindi che il perimetro del pentagono è 46 cm sommando le lunghezze di tutti i suoi lati.

7) La risposta è (D).

Infatti

$$1999^{1999} = 1999^{2 \cdot 999 + 1} = (1999^2)^{999} \cdot 1999;$$

l'ultima cifra di  $1999^2$  è 1 e quindi anche l'ultima cifra di  $(1999^2)^{999}$  è 1. Infine moltiplicando questo numero per 1999 si ottiene un numero la cui ultima cifra è 9.

8) La risposta è (C).

È evidente che per negare l'asserto occorre e basta una scuola in cui non ci sono classi con tutti promossi. Più formalmente, trascrivendo l'asserto come

$$(\forall S)(\exists C \in S)(\forall x \in C).\text{prom}(x)$$

e applicando le equivalenze  $\neg \forall \equiv \exists \neg$  e  $\neg \exists \equiv \forall \neg$  si ottiene

$$\begin{aligned} \neg(\forall S)(\exists C \in S)(\forall x \in C).\text{prom}(x) &\equiv (\exists S)\neg(\exists C \in S)(\forall x \in C).\text{prom}(x) \equiv \\ &(\exists S)(\forall C \in S)\neg(\forall x \in C).\text{prom}(x) \equiv (\exists S)(\forall C \in S)(\exists x \in C).\neg\text{prom}(x) \end{aligned}$$

9) La risposta è (B).

Una volta estratto il 27, rimangono 89 bussolotti, tutti equiprobabili.

10) La risposta è (D).

L'area richiesta si ottiene sommando l'area di quattro rettangoli di lati 30 m e 100 m con l'area di un cerchio di raggio 100 m. In definitiva l'area richiesta è circa uguale a  $12000 + 31400 \text{ m}^2$ , che è un valore compreso fra 4 e 5 ettari.

11) La risposta è (E).

Il numero che indica le ore è un quadrato perfetto se è 0, 1, 4, 9, 16 (5 possibilità). Quello che indica i minuti è un quadrato perfetto se è 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 (8 possibilità). Poiché ciascuna delle ore si può accoppiare con ciascuno dei minuti, le combinazioni possibili sono  $5 \cdot 8 = 40$ .

12) La risposta è (A).

Infatti  $a = 3b$ ,  $c = 2b$ ; quindi  $\frac{2a}{3c} = \frac{6b}{6b} = 1$ .

13) La risposta è (B).

È facile verificare che  $43^2 < 1900$  e  $45^2 > 2000$ . Il lato del campo deve dunque misurare 44 metri, e dunque l'area del campo vale  $1936 \text{ m}^2$ . Ne segue che ognuno dei due figli riceverà esattamente  $968 \text{ m}^2$ .

14) La risposta è (E).

Il primo in ordine alfabetico è 100, l'ultimo è 21.

15) La risposta è (C).

La somma dei numeri su una diagonale è  $16 + 10 + 4 = 30$ . Analizzando i numeri sulla prima riga si ha dunque  $16 + 2 + a = 30$ , da cui  $a = 12$ . Analogamente, analizzando i numeri sulla prima colonna si ha  $16 + b + c = 30$ , da cui  $b + c = 14$ . Pertanto  $a + b + c = 12 + 14 = 26$ .

16) La risposta è (B).

Il prodotto NON è multiplo di 5 se e solo se nessuno dei due numeri estratti è multiplo di 5 (poiché 5 è un numero primo). Gli unici multipli di 5 compresi fra 1 e 12 sono i numeri 5 e 10, pertanto la probabilità che nessuno dei due numeri estratti sia multiplo di 5 è  $(\frac{10}{12})^2 = \frac{25}{36}$ . La probabilità cercata è quella del caso complementare, ed è dunque uguale a  $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$ .

17) La risposta è (D).

Infatti le coppie di piani perpendicolari sono in corrispondenza biunivoca con gli spigoli del cubo, che sono 12.

SECONDA SOLUZIONE

Possiamo considerare che ciascun piano ne ha altri quattro perpendicolari a lui e che i piani in tutto sono 6; se moltiplichiamo questi due numeri otteniamo 24 e in tal modo avremo contato esattamente due volte ciascuna coppia: se ne deduce nuovamente che le coppie sono 12.

18) La risposta è (C).

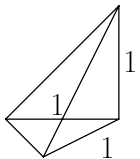
La distanza fra due lampioni successivi si ottiene calcolando il massimo comun divisore fra 150, 210 e 300, ed è quindi 30 metri. Il numero di lampioni da installare su ogni lato di ciascuna strada sarà quindi 6, 8 e 11 rispettivamente. Il numero totale di lampioni occorrenti è quindi  $2 \times (6 + 8 + 11) = 50$ .

19) La risposta è (C).

Infatti il pezzo ottenuto è una piramide avente per base un triangolo isoscele e rettangolo, con il vertice che si proietta ortogonalmente sulla base all'intersezione dei cateti.

In tale piramide i due cateti suddetti e l'altezza valgono 1, e dunque si ha

$$V = \frac{1}{3} \text{area di base} \times \text{altezza} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$$



20) La risposta è (D).

L'ultima cifra dovrà sicuramente essere uno zero (altrimenti  $n$  non è divisibile nemmeno per 10).

A questo punto la somma delle rimanenti cifre deve fare 1999 e dunque, poiché  $222 \cdot 9 = 1998 < 1999$ , le altre cifre saranno almeno 223, e quindi  $n$  avrà almeno 224 cifre. In effetti il numero  $\underbrace{299 \dots 9}_{221 \text{ cifre}} 80$  ha esattamente 224 cifre la cui somma è 1999, ed è divisibile per 20 in quanto termina

con 20.