

I Giochi di Archimede - Gara del Biennio

5 dicembre 2000

La prova consiste di 20 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere (A), (B), (C), (D), (E).

Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.

Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.

Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento!

Nome _____ Cognome _____ Classe _____

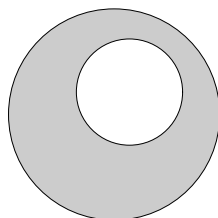
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	

Al mercato delle pulci un venditore vende per 80 Euro uno scaffaletto che aveva acquistato per 70 Euro. Poi ci ripensa, riacquista lo scaffaletto per 90 Euro e lo rivende per 100 Euro. Quanto ha guadagnato alla fine?

- (A) Nulla (B) 10 Euro (C) 20 Euro (D) ha perso 10 Euro
(E) nessuna delle precedenti.

Nella figura a fianco il raggio del cerchio esterno è il doppio di quello del cerchio interno. Quanto vale il rapporto fra l'area della regione ombreggiata e quella della regione bianca all'interno?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4
(D) dipende dalla posizione del cerchio
(E) nessuna delle precedenti.



Qual è la media (aritmetica) dei numeri 1, 2, 3, ..., 1999, 2000?

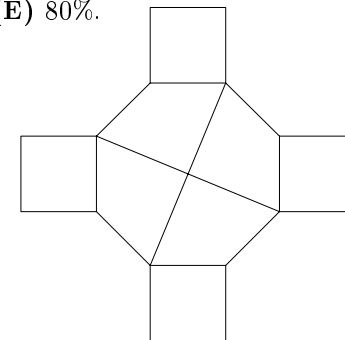
- (A) 999 (B) 999,5 (C) 1000 (D) 1000,5 (E) 1001.

Quanto vale $6a$ se $3a - 2 = 2b - 1$?

- (A) $4b + 1$ (B) $4b + 2$ (C) $4b + 3$ (D) $4b + 4$ (E) nessuna delle precedenti.

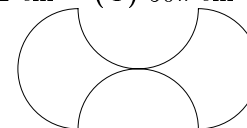
- 5) Se aumentiamo la lunghezza della base di un rettangolo del 30% e quella dell'altezza del 50%, l'area aumenta del
(A) 195% (B) 115% (C) 150% (D) 95% (E) 80%.

- 6) Quanti assi di simmetria possiede la figura a lato?
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8
(E) nessuna delle precedenti.



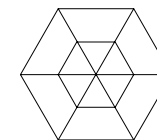
- 7) Ogni mese un grossista spedisce a un negoziante 24 litri, 32 litri e 40 litri di tre varietà diverse di vino utilizzando il minimo numero possibile di recipienti tutti uguali e completamente riempiti, ovviamente senza mescolare qualità diverse di vino nello stesso recipiente. Quanti recipienti riceverà quel negoziante in un anno?
(A) 36 (B) 72 (C) 144 (D) 288 (E) i dati sono insufficienti.

- 8) Quanto vale l'area della regione delimitata dalle quattro semicirconferenze di diametro 10 cm mostrate in figura?
(A) 100 cm^2 (B) $100\pi\sqrt{2} \text{ cm}^2$ (C) $50\pi \text{ cm}^2$ (D) $100\pi \text{ cm}^2$ (E) $25\pi \text{ cm}^2$.



- 9) Emanuele soffre d'insonnia. Un giorno alle 11:11 precise egli afferma: "non dormo da 53 ore e 53 minuti". A che ora si è svegliato l'ultima volta?
(A) 5:04 (B) 5:18 (C) 5:58 (D) 6:04 (E) 6:18.

- 10) Il lato dell'esagono più piccolo in figura vale 1 e quello dell'esagono più grande vale 2. Qual è la somma delle lunghezze di tutti i tratti disegnati?
(A) 18 (B) 24 (C) 30 (D) 36
(E) nessuna delle precedenti.



- 11) Un podista e un ciclista partono insieme dalla città A diretti alla città B distante da A 13 km, con l'accordo di fare la spola fra A e B senza fermarsi mai. Sapendo che ogni ora il podista percorre 9 km mentre il ciclista ne percorre 25, quale distanza separerà i due sportivi dopo tre ore dall'inizio della competizione?
(A) 1 km (B) 2 km (C) 3 km (D) 4 km (E) 5 km.

Il deposito della libreria di Tullio è una stanza cubica di lato 5 m e negli ultimi tempi è diventato troppo piccolo per poter contenere tutte le giacenze di magazzino.

Perciò Tullio ne ha comprato uno nuovo, sempre di forma cubica, che, sostituito al precedente, gli ha permesso di guadagnare 218 m^3 di spazio. Di quanti metri il lato del nuovo deposito è più lungo di quello vecchio?

(A) 1 m (B) 2 m (C) 3 m (D) 4 m (E) 5 m.

Il prezzo della mascotte delle olimpiadi di matematica è dato dalla somma del prezzo delle materie prime e del prezzo della lavorazione. L'anno scorso la mascotte costava 10 Euro. Quest'anno il costo delle materie prime è raddoppiato; e quindi la mascotte costa 11,80 Euro. Quanto incide quest'anno il prezzo delle materie prime sul prezzo finale del prodotto?

(A) Meno di 1 Euro (B) tra 1 e 2 Euro (C) tra 2 e 3 Euro
(D) tra 3 e 4 Euro (E) più di 4 Euro.

Un ladro spia Marco mentre chiude la sua valigia con un lucchetto con combinazione di 3 cifre (ciascuna cifra va da 0 a 9). Non ha potuto vedere la combinazione ma è riuscito a capire che due cifre consecutive sono uguali e la terza è diversa. Qual è il numero massimo di combinazioni che il ladro dovrà provare per aprire la valigia di Marco?

(A) 180 (B) 190 (C) 200 (D) 210 (E) 220.

Un giardino quadrato di 20 metri di lato viene innaffiato con irrigatori puntiformi. Ciascun irrigatore innaffia tutti i punti che distano da esso al più 10 metri. Qual è il minimo numero di irrigatori necessario per innaffiare tutto il giardino?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5.

Versando 40 cm^3 di acqua in un recipiente a forma di parallelepipedo rettangolo avente un lato della base lungo 4 cm, il livello del liquido raggiunge 5 cm. Versandone una quantità incognita in un altro recipiente parallelepipedo rettangolo che ha quel lato della base lungo 6 cm e l'altro inalterato, il liquido raggiunge un livello di 15 cm. Quanti cm^3 di acqua sono stati versati la seconda volta?

(A) 180 (B) 80 (C) 40 (D) 20 (E) $\frac{80}{9}$.

Qual è la probabilità che, presi a caso tre vertici distinti di un esagono regolare, essi siano i vertici di un triangolo equilatero?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{1}{10}$ (E) $\frac{1}{20}$.

Anna, Barbara, Chiara e Donatella si sono sfidate in una gara di nuoto fino alla boa. All'arrivo non ci sono stati ex-aequo. Al ritorno,

Anna dice: "*Chiara è arrivata prima di Barbara*";

Barbara dice: "*Chiara è arrivata prima di Anna*";

Chiara dice: "*Io sono arrivata seconda*".

Sapendo che una sola di esse ha detto la verità,

(A) si può dire solo chi ha vinto

(B) si può dire solo chi è arrivata seconda

(C) si può dire solo chi è arrivata terza

(D) si può dire solo chi è arrivata ultima

(E) non si può stabilire la posizione in classifica di nessuna.

19) Nella tomba del faraone Tetrakamion è stato ritrovato uno smeraldo, lavorato a forma di tetraedro (piramide a base triangolare) i cui spigoli misurano in millimetri 54, 32, 32, 29, 27, 20. Indicando con A, B, C, D i vertici del tetraedro e sapendo che AB è lungo 54, quanti millimetri è lungo CD ?

(A) 32 (B) 29 (C) 27 (D) 20 (E) non si può determinare.

20) In una scuola il 60% degli studenti è di sesso maschile, il 90% è minorenne ed il 60% ha i capelli castani. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

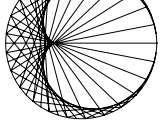
(A) C'è almeno una ragazza maggiorenne.

(B) C'è almeno una ragazza con i capelli castani.

(C) C'è almeno un ragazzo minorenne e castano.

(D) Non ci sono ragazzi maggiorenni e castani.

(E) C'è almeno un ragazzo biondo.



C	B	D	B	D	E	C	A	B	C	B	B	D	A	D	A	D	C	D	C
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

- 1) La risposta è (C).

Il venditore guadagna $80 - 70 = 10$ Euro dalla prima vendita e $100 - 90 = 10$ Euro dalla seconda vendita. Il suo guadagno totale sarà quindi $10 + 10 = 20$ Euro.

- 2) La risposta è (B).

Detto r il raggio del cerchio interno, la sua area vale πr^2 . L'area della regione ombreggiata sarà $\pi(2r)^2 - \pi r^2 = 3\pi r^2$ e il rapporto fra le due aree richieste sarà quindi $\frac{3\pi r^2}{\pi r^2} = 3$.

- 3) La risposta è (D).

Basta accoppiare il primo numero con l'ultimo, il secondo con il penultimo e così via, fino a ottenere 1000 coppie. Visto che la somma di due numeri di una coppia è 2001, avremo che la somma di tutti i numeri è $S = 2001 \times 1000$. Pertanto la media aritmetica è $S/2000 = 2001/2 = 1000,5$.

- 4) La risposta è (B).

Infatti $2(3a - 2) = 2(2b - 1)$ da cui $6a - 4 = 4b - 2$, cioè $6a = 4b + 2$.

- 5) La risposta è (D).

Chiamiamo b la base del rettangolo e h la sua altezza. Aumentando base e altezza rispettivamente del 30% e del 50%, l'area diventerà

$$\left(1 + \frac{30}{100}\right) b \times \left(1 + \frac{50}{100}\right) h = \left(1 + \frac{30}{100} + \frac{50}{100} + \frac{1500}{10000}\right) bh = \left(1 + \frac{95}{100}\right) bh.$$

Pertanto l'area aumenterà del 95%.

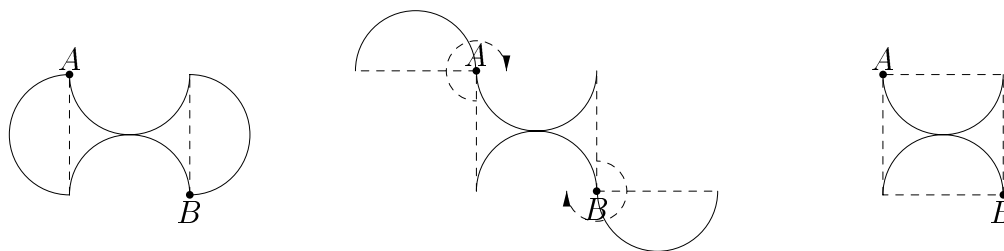
- 6) La risposta è (E).

L'ottagono regolare ha 8 assi di simmetria, 4 passanti per 2 vertici opposti e altri 4 passanti per i punti medi di due lati opposti. I quattro assi del primo tipo non sono assi di simmetria di tutta la figura, perché nessuno dei quadrati costruiti sui lati ha un quadrato simmetrico rispetto a tali assi. I quattro assi del secondo tipo non sono neppure essi assi di simmetria di tutta la figura, perché le due diagonali dell'ottagono tracciate nella figura data non hanno le corrispondenti simmetriche. Quindi non c'è nessun asse di simmetria.

- 7) La risposta è (C).

Poiché i recipienti devono essere tutti uguali, la loro capacità in litri deve essere un divisore di 24, 32 e 40, e quindi non può superare il massimo comune divisore di questi numeri, che è 8. Il minimo numero di recipienti si ottiene quando la loro capacità è la massima possibile, e quindi uguale a 8 litri. Utilizzando recipienti di 8 litri, il grossista utilizzerà $3 + 4 + 5 = 12$ recipienti al mese, e quindi il negoziante riceverà $12 \times 12 = 144$ recipienti in un anno.

Scomponendo la figura data seguendo le linee tratteggiate e ricomponendola ruotando i due semicerchi in senso orario di 270° intorno ad A e B rispettivamente (vedi figure sottostanti), si ottiene un quadrato avente il lato lungo 10 cm la cui area, equivalente a quella della figura data, è 100 cm^2 .



9) La risposta è (B).

Un periodo di 53 ore e 53 minuti equivale a 2 giorni, 5 ore e 53 minuti. Pertanto per calcolare quando si è svegliato Emanuele basta togliere 5 ore e 53 minuti alle 11:11. Il modo più comodo per eseguire tale calcolo è di togliere 6 ore e poi aggiungere 7 minuti. Si ottiene così facilmente che l'ora richiesta è data dalle 5:18.

10) La risposta è (C).

La lunghezza richiesta può essere ottenuta sommando i perimetri dei due esagoni regolari (12 quello del più grande e 6 quello del più piccolo) alla lunghezza di 3 delle diagonali dell'esagono grande, ciascuna delle quali misura 4. In totale, $12 + 6 + 3 \cdot 4 = 30$.

11) La risposta è (B).

Dopo 3 ore, il podista avrà percorso 27 km. Poiché 26 km corrispondono all'andata e ritorno fra A e B , egli si troverà a 1 km da A . Nello stesso tempo, il ciclista avrà percorso 75 km, tre in meno rispetto a tre volte l'andata e ritorno fra A e B : perciò egli si troverà a 3 km da A . La loro distanza sarà dunque di $3 - 1 = 2$ km.

12) La risposta è (B).

Infatti il volume del nuovo deposito è $(125+218) \text{ m}^3 = 343 \text{ m}^3$ e quindi il lato misurerà $\sqrt[3]{343} \text{ m} = 7 \text{ m}$.

13) La risposta è (D).

Quest'anno il prezzo della mascotte è aumentato di 1,8 Euro. Visto che tale aumento dipende unicamente dal raddoppio del prezzo delle materie prime, ne deduciamo che l'anno scorso le materie prime costavano 1,8 Euro, e dunque quest'anno costano 3,6 Euro.

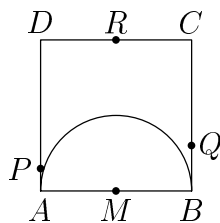
14) La risposta è (A).

Il numero di combinazioni del tipo xyx con y diverso da x è 10×9 (10 scelte per la cifra x e, per ciascuna di esse, 9 scelte per la cifra y), ed è uguale al numero di combinazioni del tipo yxx . Pertanto le combinazioni sono in tutto 180.

15) La risposta è (D).

È immediato verificare che 4 irrigatori sono sufficienti: basta collocarli nei punti medi dei lati. Per vedere che 3 irrigatori non sono sufficienti, osserviamo innanzitutto che ogni irrigatore può coprire solo i punti di un cerchio di raggio 10 m: in particolare, due punti distanti tra loro più di 20 m non possono essere coperti dallo stesso irrigatore. Poiché i vertici del quadrato sono 4, se tre irrigatori fossero sufficienti, ci sarebbero due vertici del quadrato, A e B , coperti da uno stesso irrigatore: inoltre A e B dovrebbero essere adiacenti (due vertici opposti hanno una distanza di $20\sqrt{2} > 20$ m) ed il punto di irrigazione dovrebbe coincidere con il punto medio M

i punti del semicerchio di centro M e raggio 10. Poiché i punti P su AD distante 1 m da A , Q su BC distante 2 m da B e R punto medio di CD non appartengono a questo semicerchio ed hanno, a due a due, distanza maggiore di 20, sono necessari almeno altri tre irrigatori distinti per coprire questi 3 punti.



16) La risposta è (A).

Detti x il lato di base noto e y quello incognito del parallelepipedo, h il livello dell'acqua e V il volume versato, si ha che il lato di base incognito è $y = \frac{V}{h \cdot x}$ da cui $y = \frac{40 \text{ cm}^3}{5 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}} = 2 \text{ cm}$. Si ha poi $V' = x' \cdot y \cdot h'$ da cui $V' = 6 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm} = 180 \text{ cm}^3$

17) La risposta è (D).

Siano A, B, C, D, E, F i vertici dell'esagono, in senso antiorario. Si scelga un vertice a caso. Per simmetria, possiamo supporre che questo vertice sia A . Per formare un triangolo equilatero con A , gli altri due vertici devono essere necessariamente C ed E . La probabilità che il secondo vertice sia uno di essi è $\frac{2}{5}$; la probabilità che il terzo vertice sia il vertice restante è $\frac{1}{4}$. Pertanto la probabilità richiesta è $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.

SECONDA SOLUZIONE. Le possibilità di scegliere 3 vertici a caso sono uguali al numero di sottoinsiemi di 3 elementi di un insieme di 6 elementi, e cioè $\binom{6}{3} = 20$. Le possibilità che essi formino un triangolo equilatero sono soltanto 2, e cioè che i vertici siano A, C, E oppure B, D, F . Quindi il numero di casi favorevoli diviso per il numero di casi possibili è $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

18) La risposta è (C).

Chiara non può essere arrivata prima, perché almeno una fra Anna e Barbara mente. Chiara non può essere arrivata seconda, perché in questo caso dovrebbe essere arrivata prima di almeno una fra Anna e Barbara; quindi sia lei che una di queste due direbbe la verità, contro le ipotesi. Pertanto Chiara mente; ma allora non può essere arrivata ultima, poiché o Anna o Barbara dice la verità. Ne segue che Chiara è arrivata terza.

Osserviamo che, se Anna e Barbara sono arrivate una prima di Chiara e l'altra dopo, le ipotesi sono comunque verificate. Pertanto non si può stabilire né chi è arrivata prima, né chi è arrivata seconda, né chi è arrivata ultima.

19) La risposta è (D).

Gli spigoli AC e BC , così come gli spigoli AD e BD , insieme con AB formano un triangolo. Pertanto $AC + BC > 54$ e $AD + BD > 54$. Poiché la somma di 20 con qualsiasi fra i numeri 32, 32, 29, 27 è inferiore a 54, lo spigolo di lunghezza 20 non può essere nessuno fra AC, BC, AD, BD , e quindi deve essere CD (lo spigolo opposto ad AB).

SECONDA SOLUZIONE

Per dimostrare che il lato CD è lungo 20, dimostriamo che nessun altro lato del tetraedro può essere lungo 20. Se infatti così fosse, il lato lungo 20 avrebbe un estremo in comune con il lato

allora ci sarebbe una faccia del tetraedro con un lato lungo 54, un lato lungo 20, ed un lato la cui lunghezza può essere 32, 29 o 27. Ma questo non è possibile visto che in ogni triangolo il lato più lungo deve essere maggiore della somma degli altri due.

OSSERVAZIONE

Per convincersi dell'esistenza di un tetraedro con le misure date si può fare la seguente costruzione. Consideriamo un triangolo ABC di lati $AB = 54$, $AC = 32$, $BC = 27$, ed il triangolo ABD di lati $AB = 54$, $AD = 32$, $BD = 29$. Supponiamo inoltre che C e D stiano in semipiani diversi rispetto alla retta AB . Con qualche calcolo (non semplicissimo) si vede che in tale configurazione la distanza tra C e D è > 20 . Supponiamo ora di ruotare nello spazio di 180 gradi il triangolo ABD intorno alla retta AB . Alla fine il punto D si sarà spostato in un punto D' , situato dalla stessa parte di C rispetto alla retta AB . In tale configurazione si ha (con qualche calcolo) che $CD' < 20$. Pertanto durante la rotazione deve esistere una posizione in cui la distanza tra C e D è esattamente 20. In tale posizione i punti $ABCD$ determinano il tetraedro cercato.

20) La risposta è **(C)**.

Le ragazze sono il 60 %, i non castani il 40 %, i maggiorenni il 10 %. Anche se non vi fosse nessuna sovrapposizione, il totale arriverebbe al 90 % e avanzerebbe il 10 % di maschi minorenni castani.

D'altra parte, le affermazioni **(A)**, **(B)**, **(D)** ed **(E)** possono essere false, come si può vedere dal seguente esempio di una scuola con 1000 studenti:

se nella scuola ci sono 400 ragazze, tutte minorenni e bionde, e 600 ragazzi tutti castani, di cui 500 minorenni e 100 maggiorenni, tutte le affermazioni riportate nel testo sono vere, ma le **(A)**, **(B)**, **(D)**, **(E)** sono false.