PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

5 dicembre 2000

a prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate on le lettere **(A)** , **(B)** , **(C)** , **(D)** , **(E)** .
na sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta ale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza sposta vale 1 punto.
er ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che tieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o orrezioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcola-rice.
tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon voro e buon divertimento!

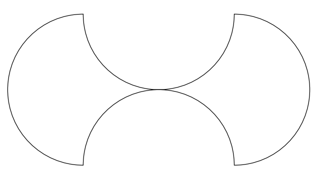
e ____________ *Cognome* ______________ *Classe* ____

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Un podista e un ciclista partono insieme dalla città A diretti alla città B distante da A 13 km, con l'accordo di fare la spola fra A e B senza fermarsi mai. Sapendo che ogni ora il podista percorre 9 km mentre il ciclista ne percorre 25, quale distanza separerà i due sportivi dopo tre ore dall'inizio della competizione?
(A) 1 km **(B)** 2 km **(C)** 3 km **(D)** 4 km **(E)** 5 km.

Quale fra i seguenti numeri è superiore all'unità?
(A) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$ **(B)** $(1{,}1)^{-1{,}1}$ **(C)** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$ **(D)** $(\sqrt{2}-1)^{\sqrt{2}-1}$
(E) $(2-\sqrt{3})^{2-\sqrt{3}}$.

Il perimetro della regione raffigurata a fianco è formato da quattro semicirconferenze di diametro 10 cm. Quanto vale la sua area?
(A) 100 cm^2 **(B)** $100\pi\sqrt{2}$ cm^2 **(C)** 50π cm^2
(D) 100π cm^2 **(E)** 25π cm^2.



Un padre ha 46 anni e la somma delle età dei suoi tre figli è 22. Entro quanti anni l'età del padre sarà uguale alla somma delle età dei figli?
(A) 6 **(B)** 8 **(C)** 10 **(D)** 12 **(E)** mai.

5) Nel triangolo ABC le semirette AN e CM sono le bisettrici di $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}A$ e si intersecano in P. Sapendo che $A\hat{P}C = 140°$, quanto misura l'angolo in B?
(A) 90° **(B)** 100° **(C)** 110° **(D)** 120° **(E)** 130°.

6) Si considerino i numeri naturali n di tre cifre che verificano la seguente proprietà: le cifre di n sono tre numeri consecutivi in ordine qualsiasi (esempio 645). Quanti fra questi numeri sono primi?
(A) Nessuno **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** più di 2, ma meno di 10 **(E)** più di 10.

7) Fra tutti i triangoli i cui lati misurano 4, 5, x, quello di area massima avrà x pari a
(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 4,5 **(D)** $\sqrt{20}$ **(E)** $\sqrt{41}$.

8) Una novella Penelope ha tessuto una tela per tutto il 1999, dal primo all'ultimo giorno. Ogni mattina ha tessuto 20 cm di tela e ogni pomeriggio ne ha disfatta un po', precisamente 20 cm nei giorni pari del mese e 19 cm nei giorni dispari. Quanto era lunga la tela alla fine?
(A) 140 cm **(B)** 172 cm **(C)** 186 cm **(D)** 200 cm **(E)** 210 cm.

9) In una scuola il 60% degli studenti è di sesso maschile, il 90% è minorenne ed il 60% ha i capelli castani. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?
(A) C'è almeno una ragazza maggiorenne.
(B) C'è almeno una ragazza con i capelli castani.
(C) C'è almeno un ragazzo minorenne e castano.
(D) Non ci sono ragazzi maggiorenni e castani.
(E) C'è almeno un ragazzo biondo.

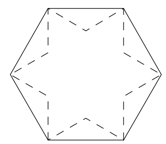
10) Sapendo che $\frac{1}{a} = a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{d} = 2$ quanto vale il prodotto $abcd$?
(A) $\frac{5}{16}$ **(B)** $\frac{1}{5}$ **(C)** $\frac{3}{7}$ **(D)** $\frac{9}{16}$ **(E)** $\frac{5}{4}$.

11) Marco dice: *"La mia squadra è stata davanti alla tua in classifica per tutte le prime tre giornate, e solo ora alla quarta ci avete raggiunti".*
Roberto risponde: *Non ti dimenticare però che alla terza giornata abbiamo pareggiato proprio in casa vostra e che, al contrario di voi, siamo ancora imbattuti".*
Quanti punti ha ognuna delle due squadre al termine della quarta giornata? (Si assegnano 3 punti alla squadra che vince, 0 punti a quella che perde, 1 punto a ciascuna squadra in caso di pareggio).
(A) 7 **(B)** 6 **(C)** 5 **(D)** 4 **(E)** i dati sono insufficienti.

12) Il prezzo della mascotte delle olimpiadi di matematica è dato dalla somma del prezzo delle materie prime e del prezzo della lavorazione. L'anno scorso la mascotte costava 10 Euro. Quest'anno il costo delle materie prime è raddoppiato, mentre il costo della lavorazione è aumentato del 10%; di conseguenza quest'anno la mascotte costa 12 Euro. Quanto incide quest'anno il prezzo delle materie prime sul prezzo finale del prodotto?

(A) Meno di 1 Euro **(B)** tra 1 e 2 Euro **(C)** tra 2 e 3 Euro
(D) tra 3 e 4 Euro **(E)** più di 4 Euro.

Il rapporto fra l'area dell'esagono regolare e quella del poligono stellato rappresentato in figura, che ha tutti i lati giacenti su 6 delle diagonali dell'esagono, è

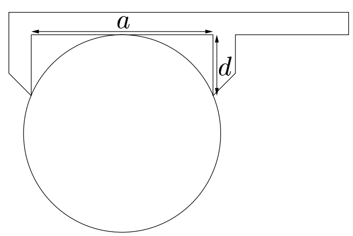


(A) $\frac{4}{3}$ **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** $\frac{5}{3}$ **(D)** $\frac{6}{5}$ **(E)** $\frac{5}{4}$.

Emanuele ha fatto un lungo viaggio e non riesce a dormire. Dopo essere tornato in Italia, alle 11:11 precise ora italiana egli afferma: *"non dormo da 53 ore e 53 minuti"*. A che ora si è svegliato l'ultima volta, sapendo che in quel momento si trovava in Corea e ora si trova in Italia (ricordiamo che la differenza di fuso orario fra l'Italia e la Corea è di 7 ore in avanti)?
(A) 12:04 **(B)** 12:18 **(C)** 12:58 **(D)** 13:04 **(E)** 13:18.

Si ha, per ogni x, $f(x) = 4^x$. Allora $f(x+1) - f(x)$ vale:
(A) $f(x)$ **(B)** $2f(x)$ **(C)** $3f(x)$ **(D)** 4 **(E)** 1.

Uno studente vuole misurare il diametro di un cilindro usando un calibro. Purtroppo lo strumento disponibile ha i becchi troppo corti, e non è possibile fare in modo che essi tocchino contemporaneamente due punti diametralmente opposti della superficie laterale. Lo studente decide allora di utilizzare il metodo mostrato nella figura a fianco, in cui il bordo del regolo è tangente alla superficie laterale del cilindro. Detta a la misura letta sul regolo del calibro e d la distanza fra l'estremità di un becco e il regolo, si ha che il diametro vale



(A) $\sqrt{a^2+d^2}$ **(B)** $a+\frac{d^2}{4a}$ **(C)** $a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+\frac{d^2}{4}}$ **(D)** $d+\frac{a^2}{4d}$ **(E)** $d+\frac{1}{2}\sqrt{d^2+\frac{a^2}{4}}$

Si sa che il numero $2^{48}-1$ possiede esattamente due divisori compresi fra 60 e 70. Quali sono?
(A) 61 e 63 **(B)** 61 e 65 **(C)** 63 e 65 **(D)** 61 e 67 **(E)** 63 e 69.

Siano a, b, c le soluzioni dell'equazione $x^3 - 3x^2 - 18x + 40 = 0$. Sapendo che $ab = 10$, calcolare $c(a+b)$.
(A) -28 **(B)** -18 **(C)** 21 **(D)** 22 **(E)** non si può determinare.

Una piramide retta a base quadrata ha tutti gli spigoli di lunghezza unitaria. Il suo volume è
(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{6}$ **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **(D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(E)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

20) Quante sono le coppie ordinate di interi $(a,\ b)$, con $1 < a < 2000$, $1 < b < 2000$ tali che il minimo comune multiplo fra a e b è uguale a 2000?
(A) 14 **(B)** 20 **(C)** 24 **(D)** 40 **(E)** 48.

21) Sia D il dominio del piano cartesiano costituito dai punti $(x,\ y)$ tali che $x - [x] \leq y - [y]$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$ (ricordiamo che $[a]$ indica la parte intera di a ossia il più grande intero minore o uguale ad a). L'area di D è
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 6.

22) Un comune dado con le facce numerate da 1 a 6 viene lanciato tre volte e ogni volta si prende un bastoncino di lunghezza pari al risultato del lancio. Qual è la probabilità che i tre bastoncini costituiscano i lati di un triangolo rettangolo?
(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{36}$ **(C)** $\frac{1}{216}$ **(D)** $\frac{5}{18}$ **(E)** $\frac{1}{72}$.

23) Anna, Barbara, Chiara e Donatella si sono sfidate in una gara di nuoto fino alla boa. All'arrivo non ci sono stati ex–aequo. Al ritorno,
Anna dice: *"Chiara è arrivata prima di Barbara"*;
Barbara dice: *"Chiara è arrivata prima di Anna"*;
Chiara dice: *"Io sono arrivata seconda"*.
Sapendo che una sola di esse ha detto la verità,
(A) si può dire solo chi ha vinto
(B) si può dire solo chi è arrivata seconda
(C) si può dire solo chi è arrivata terza
(D) si può dire solo chi è arrivata ultima
(E) non si può stabilire la posizione in classifica di nessuna.

24) Un ladro ha visto Marco legare la propria bicicletta usando un lucchetto con una combinazione di 4 cifre (ciascuna cifra va da 0 a 9). Non è riuscito a vedere la combinazione ma ha scoperto che almeno due cifre consecutive sono uguali. Qual è il numero massimo di combinazioni che il ladro dovrà provare per rubare la bicicletta a Marco?
(A) 2160 **(B)** 2530 **(C)** 2710 **(D)** 3000 **(E)** nessuna delle precedenti.

25) Nella tomba del faraone Tetrankamon è stato ritrovato uno smeraldo, lavorato a forma di tetraedro (piramide a base triangolare) i cui spigoli misurano in millimetri 54, 32, 32, 29, 27, 20. Indicando con A, B, C, D i vertici del tetraedro e sapendo che AB è lungo 54, quanti millimetri è lungo CD?
(A) 32 **(B)** 29 **(C)** 27 **(D)** 20 **(E)** non si può determinare.

I Giochi di Archimede - Soluzioni Triennio

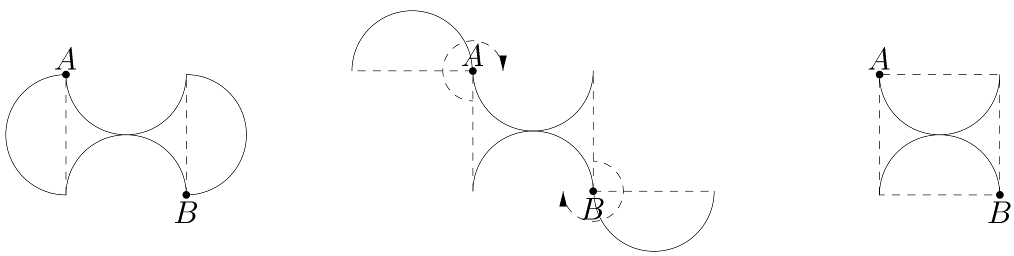
5 dicembre 2000

B	C	A	D	B	A	E	C	C	B	D	C	B	B	C	D	C	A	B	C	C	B	C	C	D
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) La risposta è **(B)**.
Dopo 3 ore, il podista avrà percorso 27 km. Poiché 26 km corrispondono all'andata e ritorno fra A e B, egli si troverà a 1 km da A. Nello stesso tempo, il ciclista avrà percorso 75 km, tre in meno rispetto a tre volte l'andata e ritorno fra A e B: perciò egli si troverà a 3 km da A. La loro distanza sarà dunque di $3 - 1 = 2$ km.

2) La risposta è **(C)**.
Un numero maggiore di 1 elevato ad una potenza positiva è maggiore di 1, elevato ad una potenza negativa è minore di 1: questo esclude la risposta **(B)**. Un numero positivo minore di 1 elevato ad una potenza positiva è minore di 1 (e questo esclude le risposte **(A)**, **(D)** ed **(E)**), mentre elevato a una potenza negativa è maggiore di 1: questo è il caso della risposta **(C)**.

3) La risposta è **(A)**.
Decomponendo la figura data seguendo le linee tratteggiate e ricomponendola ruotando i due semicerchi in senso orario di 270° intorno ad A e B rispettivamente (vedi figure sottostanti), si ottiene un quadrato avente il lato lungo 10 cm la cui area, equivalente a quella della figura data, è 100 cm^2.



4) La risposta è **(D)**.
Ogni anno che passa l'età del padre aumenta di uno, mentre la somma di quelle dei figli aumenta di tre; pertanto la differenza diminuisce di due, e quindi si annulla dopo dodici anni.

5) La risposta è **(B)**.
Infatti, ricordando che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° e che AN e CM sono bisettrici degli angoli in A e C, si ha che

$$\hat{B} = 180° - \hat{A} - \hat{C} = 180° - 2(P\hat{A}C + P\hat{C}A) = 180° - 2(180° - A\hat{P}C) = 100°.$$

6) La risposta è **(A)**.
La somma di tre numeri consecutivi è sempre multipla di tre, quindi nessuno dei numeri considerati è primo, dato che tutti possiedono il fattore tre, per il ben noto criterio di divisibilità.

7) La risposta è **(E)**.
Chiamiamo, per esempio, base del triangolo il lato lungo 4. L'area del triangolo è uguale a 2

un altro lato. L'uguaglianza tra queste due quantità, e quindi la massima area, si ha quando i due lati di lunghezza 4 e 5 sono perpendicolari. Applicando il teorema di Pitagora, si ha $x = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$.

8) La risposta è **(C)**.
Ogni sera di un giorno dispari del mese la tela è cresciuta di 1 cm, mentre la sua lunghezza è rimasta invariata alla sera di ogni giorno pari. I giorni dispari dell'anno 1999 sono stati 16 per ciascuno dei sette mesi di 31 giorni, 15 per ciascuno dei 4 mesi di 30 giorni e 14 nel mese di febbraio. La lunghezza della tela alla fine dell'anno era pertanto di $16 \times 7 + 15 \times 4 + 14 = 186$ cm.

9) La risposta è **(C)**.
Le ragazze sono il 60 %, i non castani il 40 %, i maggiorenni il 10 %. Anche se non vi fosse nessuna sovrapposizione, il totale arriverebbe al 90 % e avanzerebbe il 10 % di maschi minorenni castani.
D'altra parte, le affermazioni **(A)**, **(B)**, **(D)** ed **(E)** possono essere false, come si può vedere dal seguente esempio di una scuola con 1000 studenti:
se nella scuola ci sono 400 ragazze, tutte minorenni e bionde, e 600 ragazzi tutti castani, di cui 500 minorenni e 100 maggiorenni, tutte le affermazioni riportate nel testo sono vere, ma le **(A)**, **(B)**, **(D)**, **(E)** sono false.

10) La risposta è **(B)**.
Si possono ricavare successivamente i valori di a, b, c, d. Da $\frac{1}{a} = 2$ si ottiene $a = \frac{1}{2}$; da $a + \frac{1}{b} = 2$ si ottiene $b = \frac{2}{3}$; da $b + \frac{1}{c} = 2$ si ottiene $c = \frac{3}{4}$; da $c + \frac{1}{d} = 2$ si ottiene $d = \frac{4}{5}$. Ne segue che $abcd = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

11) La risposta è **(D)**.
Una squadra imbattuta dopo quattro giornate ha necessariamente un punteggio pari, ma 6 non è accettabile, dato che la squadra di Marco deve aver vinto la prima partita, pareggiato la terza e perso almeno una delle altre due; 4 invece è possibile se i risultati sono stati M=VSPS, R=PPPP (V=vittoria, S=sconfitta, P=pareggio).

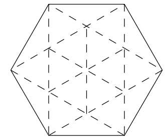
12) La risposta è **(C)**.
Indichiamo con P ed L, rispettivamente, i prezzi delle materie prime e della lavorazione dell'anno scorso. Tenendo conto degli aumenti, quest'anno i due prezzi sono rispettivamente $2P$ e $11L/10$. Si ottiene così il sistema

$$P + L = 10, \qquad 2P + 11L/10 = 12,$$

dal quale si ricava che $P = 10/9$. Per avere il prezzo delle materie prime di quest'anno basta moltiplicare per 2, ottenendo $20/9$, che è compreso tra 2 e 3.

13) La risposta è **(B)**.
Tracciando le linee indicate in figura, si verifica facilmente che l'esagono viene diviso in 18 triangoli equivalenti. Infatti le diagonali uscenti da ciascun vertice dividono la diagonale congiungente i due vertici adiacenti a quello scelto in 3 parti uguali e i sei triangoli ottusangoli hanno la stessa base e la stessa altezza dei triangoli equilateri. Poiché l'area del poligono stellato è data dalla

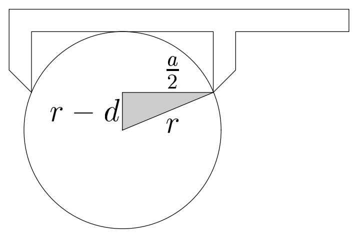
somma delle aree dei 12 triangoli equilateri (tutti uguali fra loro), il rapporto fra le aree è $\frac{}{12} = \frac{}{2}$.



14) La risposta è **(B)**
Ragioniamo prima secondo l'ora italiana. Un periodo di 53 ore e 53 minuti equivale a 2 giorni, 5 ore e 53 minuti. Pertanto per calcolare quandi si è svegliato Emanuele basta togliere 5 ore e 53 minuti alle 11:11. Il modo più comodo per eseguire tale calcolo è di togliere 6 ore e poi aggiungere 7 minuti. Si ottiene così facilmente che l'ora richiesta è data dalle 5:18 (ora italiana). Per ottenere l'ora coreana basta aggiungere 7 all'ora italiana. Pertanto Emanuele si è svegliato alle 12:18 (ora coreana).

15) La risposta è **(C)**.
Si ha $f(x+1) - f(x) = 4^{x+1} - 4^x = 4 \cdot 4^x - 4^x = 3 \cdot 4^x = 3f(x)$.

16) La risposta è **(D)**.
Applicando il teorema di Pitagora al triangolo in grigio in figura si ha: $r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (r-d)^2$ da cui $2rd = d^2 + \frac{a^2}{4}$ e infine $r = \frac{d}{2} + \frac{a^2}{8d}$. Il diametro sarà il doppio di tale quantità, cioè $d + \frac{a^2}{4d}$.



17) La risposta è **(C)**.
I fattori 63 e 65 ci sono certamente, in quanto
$2^{48} - 1 = (2^{24}+1)(2^{24}-1) = (2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{12}-1) = (2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^6+1)(2^6-1)$
e $2^6 - 1 = 63$, $2^6 + 1 = 65$.

18) La risposta è **(A)**.
Sia $f(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$. Poiché $x^3 - 3x^2 - 18x + 40 = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$, si ha $abc = -40$. Poiché $ab = 10$, si ha che $c = -4$. Inoltre, $a+b+c = 3$, da cui $a+b = 7$ e $c(a+b) = (-4) \times 7 = -28$.

Seconda soluzione.
Usando la fattorizzazione precedente, si ottiene $ab + ac + bc = 10 + c(a+b) = -18$, da cui $c(a+b) = -28$.

19) La risposta è **(B)**.
L'apotema della piramide è pari all'altezza di un triangolo equilatero di lato unitario, e vale quindi $\frac{\sqrt{3}}{2}$. L'altezza h della piramide può essere calcolata applicando il teorema di Pitagora ad un triangolo rettangolo che ha per cateti h e metà lato di base, e per ipotenusa l'apotema; quindi $h = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Il volume della piramide è quindi $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Poiché $2000 = 2^4 5^3$, si deve avere $a = 2^x 5^y$, $b = 2^s 5^t$, dove il massimo fra x e s è uguale a 4 e il massimo fra y e t è uguale a 3. Osserviamo che non si può avere contemporaneamente $x = 4$ e $s = 4$, poiché, dovendo essere $y = 3$ o $t = 3$, si avrebbe che uno fra i numeri a e b dovrebbe essere uguale a 2000. Supponiamo che $x = 4$. Allora $y = 0, 1, 2$, poiché $a \neq 2000$. Ne segue che si deve avere $t = 3$ e, poiché nemmeno b può essere uguale a 2000, $s = 0, 1, 2, 3$. Quindi in questo caso ci sono $3 \times 4 = 12$ possibilità per la coppia (a, b). Simmetricamente, se $s = 4$, ci sono altre 12 possibilità, per un totale di 24 possibilità.

21) La risposta è **(C)**.
Consideriamo i sei quadrati di lato uno costituiti dai punti (x, y) tali che $i \leq x \leq i + 1$ e che $j \leq y \leq j + 1$, con $i = 0, 1$ e $j = 0, 1, 2$. L'intersezione di ognuno di questi quadrati con D è il triangolo giacente nella parte superiore sinistra rispetto alla diagonale che unisce i punti (i, j) e $(i + 1, j + 1)$, pertanto la sua area è uguale a $\frac{1}{2}$. Moltiplicando per 6, si ottiene che l'area di D è uguale a 3.

22) La risposta è **(B)**.
L'unico triangolo rettangolo che si possa costruire con lati di lunghezza intera compresi fra 1 e 6 ha i lati di lunghezza 3, 4 e 5. La probabilità che i lanci producano i tre risultati 3, 4 e 5 è: $\frac{3}{6}$ (probabilità che il primo lancio dia uno dei tre risultati), moltiplicato per $\frac{2}{6}$ (probabilità che il secondo lancio dia uno degli altri due risultati), moltiplicato per $\frac{1}{6}$ (probabilità che il terzo lancio dia l'ultimo risultato). In totale, la probabilità è quindi $\frac{3}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

23) La risposta è **(C)**.
Chiara non può essere arrivata prima, perché almeno una fra Anna e Barbara mente. Chiara non può essere arrivata seconda, perché in questo caso dovrebbe essere arrivata prima di almeno una fra Anna e Barbara; quindi sia lei che una di queste due direbbe la verità, contro le ipotesi. Pertanto Chiara mente; ma allora non può essere arrivata ultima, poiché o Anna o Barbara dice la verità. Pertanto Chiara è arrivata terza.
Osserviamo che, se Anna e Barbara sono arrivate una prima di Chiara e l'altra dopo, le ipotesi sono comunque verificate. Pertanto non si può stabilire né chi è arrivata prima, né chi è arrivata seconda, né chi è arrivata ultima.

24) La risposta è **(C)**.
Per contare con cura le combinazioni che il ladro dovrà provare procediamo come segue.
Contiamo le combinazioni del tipo $xyww$, con x, y e w tutte diverse. Sono $10 \times 9 \times 8$ e sono tante quante quelle del tipo $xyyw$ e quelle del tipo $xxyw$. Le combinazioni $xyyy$ sono tante quante le $xxxy$ e sono 10×9; quelle del tipo $xxyx$ e $xyxx$ sono $90 \times 2 = 180$. Infine le $xxyy$ sono 10×9 (tante quante le $xyyx$) e le $xxxx$ sono 10. Pertanto il numero di combinazioni è

$$720 \times 3 + 90 \times 2 + 90 \times 2 + 90 \times 2 + 10 = 2710.$$

Seconda soluzione. Le combinazioni possibili di un lucchetto a 4 cifre sono $10^4 = 10000$ (ogni cifra ha 10 scelte possibili). Quelle che NON hanno due cifre consecutive sono $10 \times 9 \times 9 \times 9 = 7290$ (la prima cifra può essere qualsiasi, per tutte le altre si deve escludere la possibilità che siano uguali alla precedente). Quindi quelle che hanno almeno due cifre consecutive sono $10000 - 7290 = 2710$.

Gli spigoli AC e BC, così come gli spigoli AD e BD, insieme con AB formano un triangolo. Pertanto $AC + BC > 54$ e $AD + BD > 54$. Poiché la somma di 20 con qualsiasi fra i numeri 32, 32, 29, 27 è inferiore a 54, lo spigolo di lunghezza 20 non può essere nessuno fra AC, BC, AD, BD, e quindi deve essere CD (lo spigolo opposto ad AB).

Seconda soluzione

Per dimostrare che il lato CD è lungo 20, dimostriamo che nessun altro lato del tetraedro può essere lungo 20. Se infatti così fosse, il lato lungo 20 avrebbe un estremo in comune con il lato AB (osserviamo che CD è l'unico lato del tetraedro a non avere estremi in comune con AB). Ma allora ci sarebbe una faccia del tetraedro con un lato lungo 54, un lato lungo 20, ed un lato la cui lunghezza può essere 32, 29 o 27. Ma questo non è possibile visto che in ogni triangolo il lato più lungo deve essere maggiore della somma degli altri due.

Osservazione

Per convincersi dell'esistenza di un tetraedro con le misure date si può fare la seguente costruzione. Consideriamo un triangolo ABC di lati $AB = 54$, $AC = 32$, $BC = 27$, ed il triangolo ABD di lati $AB = 54$, $AD = 32$, $BD = 29$. Supponiamo inoltre che C e D stiano in semipiani diversi rispetto alla retta AB. Con qualche calcolo (non semplicissimo) si vede che in tale configurazione la distanza tra C e D è > 20. Supponiamo ora di ruotare nello spazio di 180 gradi il triangolo ABD intorno alla retta AB. Alla fine il punto D si sarà spostato in un punto D', situato dalla stessa parte di C rispetto alla retta AB. In tale configurazione si ha (con qualche calcolo) che $CD' < 20$. Pertanto durante la rotazione deve esistere una posizione in cui la distanza tra C e D è esattamente 20. In tale posizione i punti $ABCD$ determinano il tetraedro cercato.