PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Biennio

20 novembre 2002

1) La prova consiste di 20 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.

Nome ____________________ *Cognome* _______________________ *Classe* ______

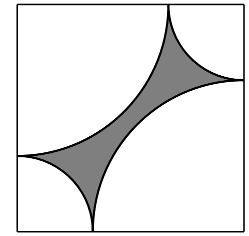
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1) Un vespista oculato, in un suo viaggio di 900 km, usa anche la ruota di scorta in modo che alla fine le tre ruote subiscano la stessa usura. Quanti km avrà percorso ogni ruota alla fine del viaggio?
(A) 300 **(B)** 450 **(C)** 500 **(D)** 600 **(E)** 750.

2) Un numero di due cifre viene sommato al numero ottenuto invertendo le sue cifre. Si divide quindi la somma ottenuta per la somma delle cifre del numero dato e si eleva al quadrato il risultato. Che numero si ottiene?
(A) 36 **(B)** 49 **(C)** 100 **(D)** 121 **(E)** dipende dalle cifre del numero dato.

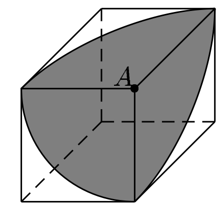
3) Massimo vuole risparmiare sui calendari. Allora col computer ha stampato tanti fogli con i numeri dei giorni e di fianco a ciascun numero il giorno della settimana. Ad ogni mese, Massimo sceglie il foglio opportuno e vi appoggia sopra un'etichetta (removibile) con il nome del mese. Quanti fogli deve aver stampato come minimo, se vuole che il calendario possa essere usato per tutto il terzo millennio?
(A) 12 **(B)** 24 **(C)** 28 **(D)** 30 **(E)** 32.

4) Nel quadrato a fianco, gli archi sono tutti dei quarti di circonferenze e hanno, a due a due, gli estremi in comune. Il rapporto fra il perimetro della figura in grigio e il perimetro del quadrato
(A) è $\frac{1}{4}$ **(B)** è $\frac{1}{\pi}$ **(C)** è $\frac{\pi}{4}$ **(D)** è $\frac{1}{2}$
(E) non può essere determinato con le informazioni date.



5) Una ruota avente diametro 5 cm è connessa ad un'altra ruota tramite una cinghia di trasmissione. La prima ruota a 1000 giri al minuto. Che diametro dovrà avere la seconda ruota per ruotare a 200 giri al minuto?
(A) 20 cm **(B)** 25 cm **(C)** 27 cm **(D)** 50 cm
(E) dipende dalla distanza fra gli assi delle ruote.

6) Da un vertice A di un cubo si tracciano degli archi di cerchio con centro in A e raggio pari al lato del cubo su ciascuna delle tre facce aventi un vertice in A. Qual è la frazione della superficie del cubo ombreggiata?
(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{3}{8}$ **(C)** $\frac{\pi}{8}$ **(D)** $\frac{\pi}{6}$ **(E)** dipende dal lato del cubo.



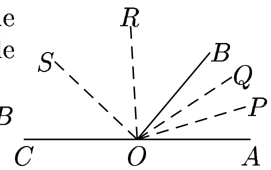
7) Quale delle seguenti espressioni è equivalente all'affermazione *"Fra tutti gli insegnanti, solo quelli con un coniuge ricco possiedono un'auto di lusso"*?
(A) *Se una persona possiede un'auto di lusso, allora essa è insegnante o ha un coniuge ricco.*
(B) *Se una persona è insegnante e ha un coniuge ricco, allora essa possiede un'auto di lusso.*
(C) *Se una persona è insegnante e possiede un'auto di lusso, allora essa ha un coniuge ricco.*
(D) *Se una persona ha un'auto di lusso, allora essa è un insegnante e ha un coniuge ricco.*
(E) *Se una persona ha un coniuge ricco, allora essa è un insegnante e possiede un'auto di lusso.*

8) Tre amiche vanno regolarmente al parco a correre: la prima ogni 10 giorni, la seconda ogni 15 e la terza ogni 14 giorni. Una domenica si trovano a correre insieme. Dopo quante domeniche si ritroveranno al parco per la prima volta a correre insieme?
(A) 22 **(B)** 25 **(C)** 30 **(D)** 70 **(E)** mai.

9) In una squadra di calcio vi sono 11 giocatori. L'età media è 22 anni. Durante una partita un giocatore viene espulso; l'età media dei giocatori rimasti diviene allora 21 anni. Che età ha il giocatore che è stato espulso?
(A) 22 anni **(B)** 23 anni **(C)** 28 anni **(D)** 32 anni **(E)** 33 anni.

10) Ad una competizione internazionale partecipano 600 ragazzi provenienti da 100 nazioni diverse e da ogni nazione provengono 6 ragazzi. Il giorno prima della gara si organizza un rinfresco in un enorme salone a cui partecipano tutti i concorrenti. Ciascuno fa la conoscenza di tutti gli altri (ad eccezione dei suoi connazionali che conosce già) stringendo loro la mano. Quante sono le strette di mano?
(A) 89100 **(B)** 178200 **(C)** 179700 **(D)** 356400 **(E)** 360000.

11) Un angolo $A\widehat{O}B$ viene trisecato dalle semirette OP, OQ, anche l'angolo $B\widehat{O}C$ (supplementare di $A\widehat{O}B$) viene trisecato dalle semirette OR, OS. Quanto vale l'angolo $Q\widehat{O}R$?
(A) 45° **(B)** 60° **(C)** 90° **(D)** dipende dall'angolo $A\widehat{O}B$
(E) la costruzione non si può fare.



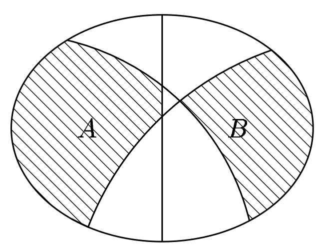
12) Fra le seguenti affermazioni:
(i) 3^{10} è un cubo;
(ii) 3^{10} è dispari;
(iii) 3^{10} è un quadrato;
quali sono quelle corrette?
(A) Solo (i) **(B)** solo (ii) **(C)** solo (iii) **(D)** (ii) e (iii) **(E)** tutte e tre.

13) In una vasca a forma di parallelepipedo con base quadrata di lato 40 cm viene immessa dell'acqua fino a raggiungere un livello di 30 cm. Poi viene completamente immerso nella vasca un cubo pieno di lato 20 cm. Qual è ora il livello dell'acqua?
(A) 32 cm **(B)** 32,5 cm **(C)** 35 cm **(D)** 40 cm **(E)** 50 cm.

14) L'Orue è una valuta che dispone di due sole monete, da 3 e da 11 centesimi. Qual è la massima cifra che non può essere pagata esattamente?
(A) 16 centesimi **(B)** 19 centesimi **(C)** 20 centesimi **(D)** 32 centesimi
(E) esistono cifre arbitrariamente grandi che non sono pagabili esattamente.

15) Immaginando di prolungare tutte le facce di un cubo, in quante regioni viene diviso tutto lo spazio (compreso l'interno del cubo)?
(A) 9 **(B)** 16 **(C)** 24 **(D)** 27 **(E)** 32.

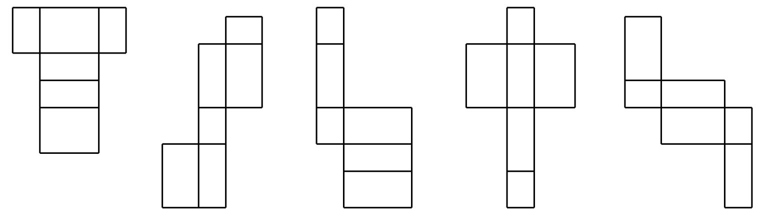
16) Le tre linee tracciate dividono, ciascuna, l'intera figura in due parti di ugual area. Si considerino le aree tratteggiate A e B. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
(A) $\text{area}(A) > \text{area}(B)$ **(B)** $\text{area}(A) = \text{area}(B)$
(C) $\text{area}(A) < \text{area}(B)$ **(D)** la figura è impossibile
(E) non si può trarre alcuna conclusione.



17) Alberto ha a disposizione un gran numero di pesi da 1, 3 e 9 grammi. Volendo usarli per equilibrare una catenella da 16 grammi ponendoli solo su uno dei due piatti di una bilancia a bracci uguali, in quanti modi diversi può scegliere i pesi?
(A) 1 **(B)** 3 **(C)** 7 **(D)** 9 **(E)** 16.

18) Un canguro sale una scala di 500 gradini in questo modo: prima salta sul 3° scalino, poi indietro di 1, poi su di 5, indietro di 3, avanti di 7, giù di 5 e così via. Purtroppo uno scalino è pericolante e se il canguro vi saltasse sopra cadrebbe a terra. Il canguro riuscirà a salire fino in cima se lo scalino pericolante è:
(A) il 200° **(B)** il 201° **(C)** il 202° **(D)** il 203°
(E) il canguro cadrà comunque.

19) Quanti degli sviluppi disegnati sotto possono essere richiusi (effettuando le piegature lungo le linee segnate) in modo da ottenere delle scatole chiuse?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5.



20) Si hanno a disposizione sei pesi da 2, 3, 5, 7, 9, 10 ettogrammi. Cinque di essi vengono posti sui due piatti di una bilancia in modo che essa si trovi in equilibrio. Qual è il peso escluso?
(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 10 **(E)** non si può determinare.

I Giochi di Archimede - Soluzioni Biennio

20 novembre 2002

D	D	C	C	B	C	C	C	D	B	B	D	C	B	D	C	D	B	C	A
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1) La risposta è **(D)**. Ogni ruota funge da scorta per un terzo del viaggio. Mentre una ruota è di scorta le altre due compiono l'intero loro percorso.

2) La risposta è **(D)**. Indicando con a e b le due cifre del numero, la catena di operazioni da effettuare può essere espressa nel seguente modo:

$$\left(\frac{(10a+b)+(10b+a)}{a+b}\right)^2 = \left(\frac{11a+11b}{a+b}\right)^2 = \left(\frac{11(a+b)}{a+b}\right)^2 = 11^2 = 121$$

3) La risposta è **(C)**. Ci sono quattro tipologie diverse di mesi: da 28, 29, 30 o 31 giorni. Un mese in qualsiasi tipologia può cominciare con uno dei sette giorni della settimana. Quindi sono possibili sette sole pagine per ogni tipo di mese. Cioè $4 \times 7 = 28$ pagine.

4) La risposta è **(C)**. Indicando con l il lato del quadrato e con r il raggio dei quarti di circonferenza piccoli, il raggio di quelle grandi sarà $l - r$. Il perimetro della figura in grigio sarà quindi

$$2 \times \frac{2\pi r}{4} + 2 \times \frac{2\pi(l-r))}{4} = \pi r + \pi l - \pi r = \pi l \ .$$

Il perimetro del quadrato è $4l$ e il rapporto fra i perimetri è quindi $\frac{\pi}{4}$.

5) La risposta è **(B)**. Il rapporto fra i diametri è inversamente proporzionale alla velocità di rotazione delle ruote. Indicando con d il diametro della seconda puleggia si avrà quindi che

$$100\frac{\text{giri}}{\text{minuto}} \times 5 \text{ cm} = 200\frac{\text{giri}}{\text{minuto}} \times d \ ,$$

da cui $d = 25$ cm.

6) La risposta è **(C)**. Indicando con l la lunghezza del lato del cubo, la superficie totale sarà $6l^2$. La regione ombreggiata è formata da 3 quarti di circonferenze, quindi la sua superficie sarà $3 \times \frac{\pi l^2}{4}$. Il rapporto sarè quindi $\frac{3 \times \frac{\pi l^2}{4}}{6l^2} = \frac{3\pi}{24} = \frac{\pi}{8}$.

7) La risposta è **(C)**. Se $I(x), CR(x), AL(x)$ sono i predicati "x è un insegnante", "x ha un coniuge ricco" e "x ha un'auto di lusso", l'asserzione del testo diviene

$$\forall x (I(x) \implies (AL(x) \implies CR(x))),$$

che è ovviamente equivalente a

$$\forall x (I(x) \& AL(x) \implies CR(x)),$$

che formalizza l'asserzione **(C)**.
D'altra parte è evidente che l'asserzione del testo non impone a nessuno di possedere auto di lusso (come fanno **(B)** ed **(E)**), né impone ai possessori di auto di lusso di essere insegnanti (come fa **(D)**), e neppure di avere un coniuge ricco se non sono insegnanti (come fa **(A)**).

8) La risposta è **(C)**. Il numero di giorni dopo i quali si ritroveranno a correre insieme è dato dal minimo comune multiplo fra 10, 15 e 14, che è 210. Le tre amiche si ritroveranno a correre insieme dopo 210 giorni, cioè dopo 30 settimane.

9) La risposta è **(D)**. La somma delle età di tutti i giocatori è $22 \times 11 = 242$ anni. Quando il giocatore che è stato espulso esce, la somma delle età diviene $21 \times 10 = 210$ anni. Quindi il giocatore che si è fatto male ha $242 - 210 = 32$ anni.

10) La risposta è **(B)**. Ognuno dei ragazzi stringe la mano a $600-6 = 594$ altri ragazzi. In ogni stretta di mano sono coinvolti 2 ragazzi, quindi il numero delle strette di mano è $\dfrac{600 \times 594}{2} = 178200$.

11) La risposta è **(B)**. $Q\hat{O}R = \frac{1}{3}C\hat{O}B + \frac{1}{3}B\hat{O}A = \frac{1}{3}\left(C\hat{O}A\right) = \frac{180°}{3} = 60°$.

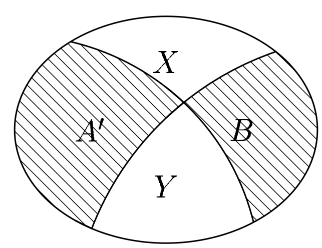
12) La risposta è **(D)**. Infatti 3^{10} non può essere un cubo in quanto 10 non è multiplo di 3, quindi la i) è falsa. Invece la ii) è vera, perché il prodotto di numeri dispari è dispari, e la iii) è vera perchè 10 è pari.

13) La risposta è **(C)**. Indicando con h l'innalzamento del livello dell'acqua, si ha $20\,\text{cm} \times 20\,\text{cm} \times 20\,\text{cm} = 40\,\text{cm} \times 40\,\text{cm} \times h$, da cui $h = 5$ cm, e il livello sarà quindi $(30 + 5)\,\text{cm} = 35\,\text{cm}$.

14) La risposta è **(B)**. Chiaramente non si possono pagare 19 centesimi, perché né 19 né 8 sono multipli di 3. D'altra parte si possono pagare tutti i multipli di 3, tutti i numeri della forma $3k + 1$ che siano maggiori o uguali a 22 e tutti i numeri della forma $3k + 2$ che siano maggiori o uguali a 11. Quindi 19 è proprio il massimo numero escluso.

15) La risposta è **(D)**. Il numero delle zone è infatti $1 + 6 + 12 + 8 = 27$. 1 è il cubo stesso, 6 sono le regioni che "confinano" con una delle 6 facce del cubo, 12 confinano ciascuna con uno degli spigoli e 8 con i vertici.

16) La risposta è **(C)**. Togliamo dal disegno il segmento verticale e indichiamo con A' l'area della figura che si ottiene sulla parte sinistra. Siccome sappiamo che $\text{area}(A') + \text{area}(X) = \text{area}(B) + \text{area}(Y)$ e che $\text{area}(A') + \text{area}(Y) = \text{area}(B) + \text{area}(X)$, ne deduciamo che $\text{area}(A') = \text{area}(B)$. Poiché il segmento verticale taglia la regione indicata con A nel testo, si ha $\text{area}(A) < \text{area}(A')$ e quindi $\text{area}(A) < \text{area}(B)$.



17) La risposta è **(D)**. Se si decide di impiegare un peso da 9 grammi, se ne possono usare 3, 2, oppure 0 da 3 grammi (e, corrispondentemente, 1, 4 oppure 7 da 1 grammo). Se si decide di non impiegare il peso da 9 grammi, se ne possono usare 5, 4, 3, 2, 1, oppure 0 da 3 grammi (e corrispondentemente 1, 4, 7, 10, 13, 16 da 1 grammo). Complessivamente sono $3 + 6 = 9$ modi di scegliere i campioni.

18) La risposta è **(B)**. La successione di salti del canguro è $3 - 1 + 5 - 3 + 7 - 5 + \ldots = (3 - 1) + (5 - 3) + (7 - 5) + \ldots = 3 + (-1 + 5) + (-3 + 7) + (-5 + 9) + \ldots$. Quindi salterà su tutti i gradini pari (precisamente dopo il salto $2k$ si trova sul gradino $2k$), mentre tocca tutti e soli i gradini dispari della forma $4k+3$. (precisamente dopo il salto $1+2k$ si trova sul gradino $3+4k$). Dunque riuscirà a salire fino in cima solo se il gradino pericolante è della forma $4k+1$.

19) La risposta è **(C)**. Il primo e il quarto non possono essere richiusi, il secondo, il terzo e il quinto sì.

20) La risposta è **(A)**. La somma di tutti i pesi è 36 ettogrammi. Se si vuole che la bilancia sia in equilibrio, occorre che la somma dei 5 pesi scelti sia pari, quindi è possibile togliere solo un peso pari. Escludendo il peso da 10 ettogrammi, si dovrebbero porre 13 ettogrammi su ciascun piatto, e questo non può essere realizzato con i 5 pesi rimasti. Escludendo invece il peso da 2 ettogrammi, si dovrebbero porre 17 ettogrammi su ciascun piatto, che si realizza ponendo 3, 5, 9 ettogrammi su un piatto e 7, 10 ettogrammi sull'altro.