PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

20 novembre 2002

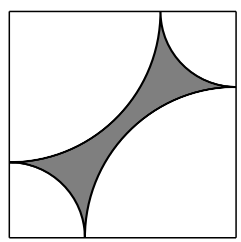
1) *La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.*
2) *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
3) *Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia.* NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) *Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.*

Nome ________________ *Cognome* ____________________ *Classe* ______

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

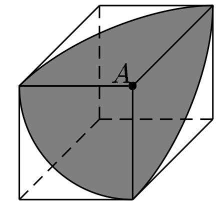
1) In alcuni casi, coppie di numeri di due cifre hanno lo stesso prodotto dei due numeri letti al contrario (ad esempio $13 \times 62 = 31 \times 26$). Quanti sono i numeri di due cifre AB (A e B sono le cifre decimali) tali che $12 \times AB = 21 \times BA$?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 9.

2) Una merce è stata scontata del 20% del suo prezzo originario. Di quale percentuale deve essere aumentata per riottenere il prezzo originario?
(A) 16% **(B)** 20% **(C)** 25% **(D)** 50% **(E)** 60%.



3) Nel quadrato a fianco, gli archi sono tutti dei quarti di circonferenze e hanno, a due a due, gli estremi in comune. Il rapporto fra il perimetro della figura in grigio e il perimetro del quadrato
(A) è $\frac{1}{4}$ **(B)** è $\frac{1}{\pi}$ **(C)** è $\frac{\pi}{4}$ **(D)** è $\frac{1}{2}$
(E) non può essere determinato con le informazioni date.

4) Una ruota avente diametro 5 cm è connessa ad un altra ruota tramite una cinghia di trasmissione. La prima ruota a 1000 giri al minuto. Che diametro dovrà avere la seconda ruota per ruotare a 200 giri al minuto?
(A) 20 cm **(B)** 25 cm **(C)** 27 cm **(D)** 50 cm
(E) dipende dalla distanza fra gli assi delle ruote.



5) Da un vertice A di un cubo si tracciano degli archi di cerchio con centro in A e raggio pari al lato del cubo su ciascuna delle tre facce aventi un vertice in A. Qual è la frazione della superficie del cubo ombreggiata?
(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{3}{8}$ **(C)** $\frac{\pi}{8}$ **(D)** $\frac{\pi}{6}$
(E) dipende dal lato del cubo.

6) Quale delle seguenti espressioni è equivalente all'affermazione *"Fra tutti gli insegnanti, solo quelli con un coniuge ricco possiedono un'auto di lusso"*?
(A) *Se una persona possiede un'auto di lusso, allora essa è insegnante o ha un coniuge ricco.*
(B) *Se una persona è insegnante e ha un coniuge ricco, allora essa possiede un'auto di lusso.*
(C) *Se una persona è insegnante e possiede un'auto di lusso, allora essa ha un coniuge ricco.*
(D) *Se una persona ha un'auto di lusso, allora essa è un insegnante e ha un coniuge ricco.*
(E) *Se una persona ha un coniuge ricco, allora essa è un insegnante e possiede un'auto di lusso.*

7) Tre amiche vanno regolarmente al parco a correre: la prima ogni 10 giorni, la seconda ogni 15 e la terza ogni 14 giorni. Una domenica si trovano a correre insieme. Dopo quanti giorni si ritroveranno al parco per la prima volta a correre insieme?
(A) 150 **(B)** 210 **(C)** 350 **(D)** 420 **(E)** mai.

8) Quale dei numeri seguenti non è razionale?
(A) -2002 **(B)** $8^{\frac{2}{3}}$ **(C)** $\sqrt{0{,}49}$ **(D)** $100^{0{,}5}$ **(E)** $1000^{0{,}1}$.

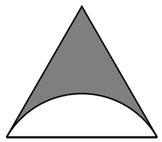
9) Due oggetti omogenei, fatti di due materiali diversi, hanno lo stesso volume, ma il primo pesa 242 g più del secondo. Sapendo che il materiale di cui è fatto il primo oggetto ha densità 8,9 g/cm^3 e quello di cui è fatto il secondo oggetto ha densità 7,8 g/cm^3, qual è il volume di ciascuno degli oggetti?
(A) 120 cm^3 **(B)** 150 cm^3 **(C)** 220 cm^3 **(D)** 300 cm^3
(E) i dati forniti sono insufficienti.

10) Il direttore di un ristorante con capienza di 600 posti non ricorda quante erano le persone da lui servite in occasione di un grande pranzo collettivo. Ricorda però che volendole sistemare in tavoli da 3 ne restava fuori esattamente una, e lo stessa cosa accadeva sistemandoli in tavoli da 4, da 5 o da 6. Invece, sistemandoli in tavoli da 7 non ne rimaneva fuori nessuna. Quanti erano i commensali?
(A) 61 **(B)** 121 **(C)** 175 **(D)** 301 **(E)** 574.

11) Per quali interi positivi a, b, c, d si può avere $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{a+c}{b+d}$?
(A) Quando $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ **(B)** quando $ad^2=cb^2$ **(C)** quando $b\cdot d=b+d$ **(D)** mai
(E) sempre.

12) Si lanciano due dadi; la probabilità che il punteggio del primo dado sia strettamente minore di quello del secondo è:
(A) $\dfrac{1}{6}$ **(B)** $\dfrac{1}{3}$ **(C)** $\dfrac{5}{12}$ **(D)** $\dfrac{1}{2}$ **(E)** $\dfrac{7}{12}$.

13) Sapendo che il triangolo equilatero in figura ha lato 3 e che l'arco di circonferenza è tangente a due lati, qual è l'area della figura in grigio?



(A) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$ **(B)** $\pi-\sqrt{3}$ **(C)** $2\sqrt{3}-\pi$ **(D)** $\dfrac{\sqrt{3}+\pi}{6}$
(E) $3\sqrt{3}-\pi$.

14) La percentuale di femmine che nascono nei parti gemellari è del $48,5\%$. Supponendo che nei parti gemellari la probabilità che i due nati siano di sesso differente sia del 33%, qual è la probabilità che in un parto gemellare nascano due femmine?
(A) 32% **(B)** 33% **(C)** $33,33\%$ **(D)** 35% **(E)** 50%.

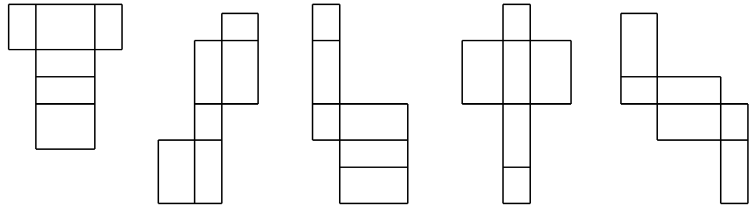
15) Un ciclista vuole percorrere un tratto di strada. A metà del percorso si rende conto di aver viaggiato solo alla media di 15 km/h; decide quindi di accelerare in modo da poter percorrere l'intero tragitto alla media più dignitosa di 30 km/h. A quale velocità deve percorrere la seconda metà del percorso?
(A) a 40 km/h **(B)** a 45 km/h **(C)** a 60 km/h **(D)** non può farcela
(E) dipende dalla lunghezza del tratto di strada.

16) Quante delle seguenti affermazioni riguardanti i numeri naturali sono vere?
(i) Presi due numeri dispari consecutivi qualsiasi, almeno uno è primo.
(ii) Presi tre numeri dispari consecutivi qualsiasi, almeno due sono primi.
(iii) Presi quattro numeri dispari consecutivi qualsiasi, almeno uno non è primo.
(iv) Presi cinque numeri dispari consecutivi qualsiasi, almeno due non sono primi.
(A) Nessuna **(B)** una **(C)** due **(D)** tre **(E)** quattro.

17) Immaginando di prolungare tutte le facce di un cubo, in quante regioni viene diviso tutto lo spazio (compreso l'interno del cubo)?
(A) 9 **(B)** 16 **(C)** 24 **(D)** 27 **(E)** 32.

18) Nella lista che segue, una sola terna di numeri **non** può rappresentare termini di una progressione geometrica (i termini non sono necessariamente consecutivi). Qual è questa terna?
(A) 3; 6; 96 **(B)** 3; 1; $\dfrac{1}{81}$ **(C)** 3; 3,3; 3,993 **(D)** 3; 6; 48 **(E)** 3; 5; 9.

19) Quanti degli sviluppi disegnati sotto possono essere richiusi (effettuando le piegature lungo le linee segnate) in modo da ottenere delle scatole chiuse?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5.



20) La somma delle cifre del quadrato di 999 999 999 999 999 995 è:
(A) 150 **(B)** 160 **(C)** 170 **(D)** 180 **(E)** 190.

21) Un canguro sale una scala di 5000 gradini in questo modo: prima salta sul 3° scalino, poi indietro di 1, poi su di 5, indietro di 3, avanti di 7, giù di 5 e così via. Purtroppo uno scalino è pericolante e se il canguro vi saltasse sopra cadrebbe a terra. Il canguro riuscirà a salire fino in cima se lo scalino pericolante è:
(A) il 2000° **(B)** il 2001° **(C)** il 2002° **(D)** il 2003°
(E) il canguro cadrà comunque.

22) In un liceo scientifico ci sono meno di 1000 studenti, di cui 230 frequentano le classi del triennio; gli alunni che frequentano la classe seconda sono i $\frac{13}{46}$ di tutti i rimanenti; inoltre, se si iscrivessero ancora 10 alunni alla prima, allora gli studenti di prima diventerebbero i $\frac{2}{5}$ del totale. Il numero di alunni della scuola è:
(A) 500 **(B)** 590 **(C)** 625 **(D)** 700 **(E)** 825.

23) In un'isola di furfanti (che mentono sempre) e cavalieri (che dicono sempre la verità) un esploratore incontra quattro abitanti del luogo, e chiede loro di che tipo sono. Le risposte che ottiene sono le seguenti:
(i) *"siamo tutti e quattro dei furfanti"*; (ii) *"no, fra noi c'è un solo cavaliere"*; (iii) *"no, ce ne sono esattamente due"*; (iv) *"io sono un cavaliere"*. Quanti dei quattro sono cavalieri?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** non è possibile dedurlo.

24) È ben noto che l'area di un triangolo equilatero di lato unitario non può essere espressa come numero razionale (cioè come rapporto di interi). Esistono tetraedri che hanno come base tale triangolo e il cui volume si esprime come numero razionale?
(A) Non ne esistono **(B)** ne esistono infiniti **(C)** solo il tetraedro regolare
(D) solo i tetraedri con altezza pari a $6\sqrt{3}$ **(E)** solo se il tetaedro è retto.

25) L'Orue è una valuta che dispone di due sole monete, da 8 e da 11 centesimi. Qual è la massima cifra che non può essere pagata esattamente?
(A) 58 centesimi **(B)** 61 centesimi **(C)** 87 centesimi
(D) esistono cifre arbitrariamente grandi che non sono pagabili esattamente
(E) nessuna delle precedenti risposte e' corretta.

I Giochi di Archimede - Soluzioni Triennio

20 novembre 2002

D	C	C	B	C	C	B	E	C	D	D	C	E	A	D	B	D	E	C	B	B	B	E	B	E
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) La risposta è **(D)**. Poiché $12 \times AB$ è pari, la cifra A deve essere pari, inoltre deve essere $B = 2A$. Dunque, oltre al caso ovvio $A = 2$ che fornisce $12 \times 21 = 21 \times 12$ si hanno solo i casi $A = 4$, $A = 6$, $A = 8$ che forniscono $12 \times 42 = 21 \times 24$, $12 \times 63 = 21 \times 36$, $12 \times 84 = 21 \times 48$.

2) La risposta è **(C)**. Indicando con p la percentuale di ricarico e con P il prezzo originario si ha infatti $P\left(1 - \frac{20}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right) = P$, da cui $p = 25\%$.

3) La risposta è **(C)**. Indicando con l il lato del quadrato e con r il raggio dei quarti di circonferenza piccoli, il raggio di quelle grandi sarà $l - r$. Il perimetro della figura in grigio sarà quindi

$$2 \times \frac{2\pi r}{4} + 2 \times \frac{2\pi(l - r))}{4} = \pi r + \pi l - \pi r = \pi l \ .$$

Il perimetro del quadrato è $4l$ e il rapporto fra i perimetri è quindi $\frac{\pi}{4}$.

4) La risposta è **(B)**. Il rapporto fra i diametri è inversamente proporzionale alla velocità di rotazione delle ruote. Indicando con d il diametro della seconda puleggia si avrà quindi che

$$100 \frac{\text{giri}}{\text{minuto}} \times 5 \text{ cm} = 200 \frac{\text{giri}}{\text{minuto}} \times d \ ,$$

da cui $d = 25$ cm.

5) La risposta è **(C)**. Indicando con l la lunghezza del lato del cubo, la superficie totale sarà $6l^2$. La regione ombreggiata è formata da 3 quarti di circonferenze, quindi la sua superficie sarà $3 \times \frac{\pi l^2}{4}$. Il rapporto sarè quindi $\frac{3 \times \frac{\pi l^2}{4}}{6l^2} = \frac{3\pi}{24} = \frac{\pi}{8}$.

6) La risposta è **(C)**. Se $I(x), CR(x), AL(x)$ sono i predicati "x è un insegnante", "x ha un coniuge ricco" e "x ha un'auto di lusso", l'asserzione del testo diviene

$$\forall x(I(x) \Longrightarrow (AL(x) \Longrightarrow CR(x))),$$

che è ovviamente equivalente a

$$\forall x(I(x) \& AL(x) \Longrightarrow CR(x)),$$

che formalizza l'asserzione **(C)**.
D'altra parte è evidente che l'asserzione del testo non impone a nessuno di possedere auto di lusso (come fanno **(B)** ed **(E)**), né impone ai possessori di auto di lusso di essere insegnanti (come fa **(D)**), e neppure di avere un coniuge ricco se non sono insegnanti (come fa **(A)**).

7) La risposta è **(B)**. Il numero di giorni dopo i quali si ritroveranno a correre insieme è dato dal minimo comune multiplo fra 10, 15 e 14, che è 210. Le tre amiche si ritroveranno a correre insieme dopo 210 giorni.

8) La risposta è **(E)**. Infatti $1000^{0,1} = \sqrt[10]{1000}$ che non è razionale. Si verifica inoltre che -2002 è addirittura intero, $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$ che è intero, $\sqrt{0,49} = 0,7$ che è razionale e $100^{0,5} = \sqrt{100} = 10$.

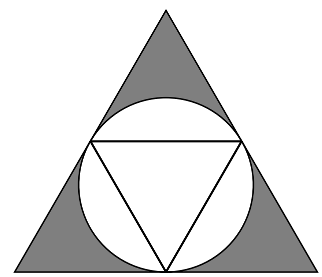
9) La risposta è **(C)**. Detto V il volume incognito espresso in cm^3, il peso del primo oggetto è $8,9V$, quello del secondo è $7,8V$. Si ha quindi $8,9V - 7,8V = 242$, da cui $V = 220\ \mathrm{cm}^3$.

10) La risposta è **(D)**. 301 è il solo fra i numeri indicati che è divisibile per 7 e che dà resto 1 nelle divisioni per 3, 4, 5, 6.

11) La risposta è **(D)**. Infatti $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$. Occorre quindi che $\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a+c}{b+d}$, cioè $(a+c)bd = (b+d)(ad+bc)$, da cui $ad^2 + cb^2 = 0$, che non è mai verificata se a, b, c, d sono interi positivi.

12) La risposta è **(C)**. Infatti se il punteggio di uno dei due dadi è n, i casi favorevoli sono $n-1$; In totale i casi favorevoli sono dunque $5+4+3+2+1+0 = 15$, mentre quelli possibili sono $6^2 = 36$. La probabilità è quindi $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

13) La risposta è **(E)**. Applicando alla figura mostrata nel testo due rotazioni, la prima di 120° e la seconda di 240° rispetto al centro della circonferenza cui appartiene l'arco, si ottiene la figura mostrata a fianco. Da essa è evidente che l'area richiesta S è $\frac{1}{3}$ dell'area che si ottiene sottraendo dall'area di un triangolo equilatero di lato 6 l'area del cerchio in esso inscritto, che ha raggio pari ad $\frac{1}{3}$ dell'altezza del triangolo. Si ha quindi:



$$S = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 6 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} - \pi\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{6\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{3}\left(9\sqrt{3} - 3\pi\right) = 3\sqrt{3} - \pi\ .$$

14) La risposta è **(A)**. Detta $p\%$ la probabilità che in un parto gemellare nascano due femmine, si ha che su 100 parti gemellari nascono $33 + 2p$ femmine, quindi con una percentuale di femmine pari a $(33+2p)/200 = (16,5+p)\%$. Poiché questa deve essere $48,5\%$, si ottiene $p = 32$.

15) La risposta è **(D)**. Detta L la lunghezza del percorso, v_1 la velocità nel primo tratto, v_2 la velocità nel secondo tratto, i tempi impiegati per percorrere la prima e la seconda metà sono $t_1 = \frac{L}{2v_1}$ e $t_2 = \frac{L}{2v_2}$. La velocità media è $v_m = \frac{L}{t_1+t_2} = \frac{L}{\frac{L}{2v_1}+\frac{L}{2v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}$. Con i numeri indicati nel testo, si ha $30 = \frac{2}{\frac{1}{15}+\frac{1}{v_2}}$ da cui $30 = \frac{30v_2}{15+v_2}$ ed infine $15 + v_2 = v_2$ che non ha soluzioni.

16) La risposta è **(B)**. La (i) è falsa, ad esempio 25 e 27 sono due numeri dispari consecutivi entrambi non primi. La (ii) è falsa, ad esempio 23, 25 e 27 sono tre numeri dispari consecutivi di cui due non sono primi. La (iii) è vera perchè dati quattro numeri dispari consecutivi (in realtà ne basterebbero tre), almeno uno è divisibile per 3 e quindi non è primo (il caso 1, 3, 5, 7 ha 1 che non è primo). La (iv) è falsa, ad esempio 11, 13, 15, 17, 19 sono 5 dispari consecutivi di cui solo uno non è primo.

17) La risposta è **(D)**. Il numero delle zone è infatti $1+6+12+8=27$. 1 è il cubo stesso, 6 sono le regioni che "confinano" con una delle 6 facce del cubo, 12 confinano ciascuna con uno degli spigoli e 8 con i vertici.

18) La risposta è **(E)**. Indicando con q la ragione della progressione si osserva che nella **(A)** e nella **(D)** i numeri possono appartenere a una progressione con $q=2$ e primo termine 3 ($3\cdot 2=6$, $3\cdot 2^4=48$, $3\cdot 2^5=96$). I numeri della **(B)** possono appartenere a una progressione con $q=\frac{1}{3}$ e primo termine 3 ($3\cdot\frac{1}{3}=1$, $3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{81}$). I numeri della **(C)** possono appartenere a una progressione con $q=1{,}1$ e primo termine 3 ($3\cdot 1{,}1=3{,}3$, $3\cdot(1{,}1)^3=3{,}993$). D'altronde i tre termini in **(E)** non possono appartenere a una stessa progressione geometrica, altrimenti si avrebbe $\left(\frac{3}{5}\right)^k=\left(\frac{5}{9}\right)^h$, con h e k interi, che non ha soluzioni.

19) La risposta è **(C)**. Il primo e il quarto non possono essere richiusi, il secondo, il terzo e il quinto sì.

20) La risposta è **(B)**. Un numero che termina per 5 può essere scritto nella forma $10\cdot a+5$ e il suo quadrato è $100a(a+1)+25$. Nell'esecizio dato, $a=99\,999\,999\,999\,999\,999$ e $a+1=10^{17}$. Il quadrato richiesto è quindi formato da 17 volte la cifra 9, seguiti da 17 zeri da 2 e 5. La somma delle cifre sarà quindi $17\cdot 9+2+5=160$.

21) La risposta è **(B)**. La successione di salti del canguro è $3-1+5-3+7-5+\ldots=(3-1)+(5-3)+(7-5)+\ldots=3+(-1+5)+(-3+7)+(-5+9)+\ldots$. Quindi salterà su tutti i gradini pari (precisamente dopo il salto $2k$ si trova sul gradino $2k$), mentre tocca tutti e soli i gradini dispari della forma $4k+3$. (precisamente dopo il salto $1+2k$ si trova sul gradino $3+4k$). Dunque riuscirà a salire fino in cima solo se il gradino pericolante è della forma $4k+1$.

22) La risposta è **(B)**. Detti n_1, n_2, n_3 i ragazzi che frequentano la prima, la seconda e il trennio, si hanno le seguenti relazioni: $\begin{cases} n_2=\frac{13}{46}(n_1+n_3) \\ n_1+10=\frac{2}{5}(n_1+n_2+n_3+10) \\ n_3=230 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} -13n_1+46n_2=2990 \\ 3n_1-2n_2=430 \end{cases}$ ed infine $n_1=230$, $n_2=130$ e il totale degli alunni è qundi 590.

23) La risposta è **(E)**. (i) è certamente un furfante (un cavaliere non potrebbe mentire dicendo che sono tutti furfanti), e le asserzioni di (ii) e (iii) sono contraddittorie, quindi almeno uno dei due è un furfante. Ora però potrebbe darsi che (ii) fosse l'unico cavaliere (in tal caso (iv) mentirebbe da furfante qual è), oppure potrebbe darsi che (iii) fosse un cavaliere (in tal caso (iv) direbbe il vero, essendo un cavaliere).

24) La risposta è **(B)**. L'area di base vale $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e dunque tutti i tetraedri con altezza $q\sqrt{3}$, ove q è un numero razionale, hanno un volume che si esprime come un numero razionale.

25) La risposta è **(E)**. In effetti non si possono pagare 58 o 61 cent, mentre se ne possono pagare $87=8\cdot 4+11\cdot 5$. D'altra parte si possono pagare tutti i multipli di 8, tutti i numeri della forma $8k+1$ che siano maggiori o uguali a 33, tutti i numeri della forma $8k+2$ che siano maggiori o uguali a 66, tutti i numeri della forma $8k+3$ che siano maggiori o uguali a 11, tutti i numeri della forma $8k+4$ che siano maggiori o uguali a 44, tutti i numeri della forma $8k+5$ che siano maggiori o uguali a 77, tutti i numeri della forma $8k+6$ che siano maggiori o uguali a 22 e tutti i numeri della forma $8k+7$ che siano maggiori o uguali a 55.
Quindi il massimo numero escluso è $69=77-8$.