PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

Dedicati alla memoria di Franco Conti

19 novembre 2003

1) La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.

Nome ____________________ *Cognome* ______________________ *Classe* ______

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) $\dfrac{3^{5/2}}{3^{2/3}} = \ldots$ **(A)** $\frac{1}{3}$ **(B)** 3 **(C)** $3^{15/4}$ **(D)** $3^{11/6}$ **(E)** $3^{19/6}$.

2) Qual è il più grande degli interi positivi n tali che la media aritmetica dei numeri da 1 a n sia < 2003 ?
(Nota: la media aritmetica di n numeri è uguale alla loro somma divisa per n.)
(A) 2002 **(B)** 2003 **(C)** 4003 **(D)** 4004 **(E)** 4005.

3) È dato un triangolo (non degenere) i cui lati hanno come lunghezze i tre numeri naturali a, b e c. Sapendo che b e c sono multipli di a, cosa possiamo dire del triangolo?
(A) Ha sempre come area un numero intero
(B) ha sempre come area un numero razionale, ma non necessariamente intero
(C) è necessariamente isoscele
(D) potrebbe essere rettangolo
(E) non esistono triangoli siffatti.

4) In un'urna ci sono 9 palline, 3 bianche, 3 rosse e 3 blu. Tullio estrae contemporaneamente 3 palline. Qual è la probabilità che ne estragga una bianca, una rossa e una blu?
(A) $\frac{1}{27}$ **(B)** $\frac{1}{9}$ **(C)** $\frac{9}{28}$ **(D)** $\frac{6}{27}$ **(E)** $\frac{3}{14}$.

5) Un ciclista percorre una salita con velocità v costante e ridiscende per la stessa strada con velocità ancora costante ma pari al triplo della precedente. La velocità media nell'intero percorso di andata e ritorno è...
(A) $\frac{3}{4}v$ **(B)** $\frac{4}{3}v$ **(C)** $\frac{3}{2}v$ **(D)** $2v$ **(E)** dipende dalla lunghezza della strada.

6)

In questo rettangolo c'è esattamente una affermazione falsa.
In questo rettangolo ci sono esattamente due affermazioni false.
In questo rettangolo ci sono almeno tre affermazioni false.
In questo rettangolo ci sono al più tre affermazioni false.

Quante affermazioni vere ci sono nel rettangolo?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

7) Quali delle diseguaglianze a fianco sono verificate per ogni valore reale positivo di x?
(A) Tutte e tre **(B)** solo a) e b) **(C)** solo b) e c)
(D) solo a) **(E)** solo c).

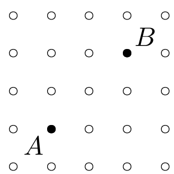
a) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} \geq 2$
b) $x^2 \geq 2x - 2$
c) $x^4 - 2x^3 + x^2 \geq 0$.

8) Michael, Juan Pablo e Kimi partecipano a un campionato di automobilismo. Dopo 5 gran premi, Michael conduce la classifica con 43 punti, seguito da Juan Pablo con 42 punti e da Kimi con 40. In ognuna delle 5 gare disputate, il primo classificato guadagnava 10 punti, il secondo 8, il terzo 7, dal quarto posto in poi non si guadagnavano punti. Basandovi su queste informazioni, sapreste dire chi si è piazzato al secondo posto per il maggior numero di volte?
(A) Michael **(B)** Juan Pablo **(C)** Kimi **(D)** Michael e Juan Pablo
(E) Michael e Kimi.

9) Un triangolo ha due vertici nei punti di coordinate $(-4,\ 1)$ e $(2,\ -1)$ e il terzo vertice nel punto di coordinate $(1,\ k)$. Per quanti valori reali di k tale triangolo risulta isoscele?
(A) Nessuno **(B)** 1 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** infiniti.

10) Un ragno vuole ispezionare la superficie esterna di una piramide a base quadrata, le cui facce laterali sono triangoli equilateri. Partendo dal centro di una faccia laterale, vuole toccare i centri di tutte le altre facce laterali, seguendo il cammino più breve possibile. Sapendo che uno spigolo della piramide misura 2, trovare la lunghezza totale del percorso.
(A) 4 **(B)** $2\sqrt{3}$ **(C)** 3 **(D)** $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ **(E)** nessuna delle precedenti.

11) In un ampio laghetto le foglie di ninfea sono disposte a reticolo, come nella figura a fianco. I rospi sono soliti muoversi con balzi da una foglia ad una adiacente in orizzontale o verticale. Un rospo si trova in A ed avvista un insetto in B. Per catturarlo, compie una traiettoria di 6 balzi (senza mai passare due volte sulla stessa foglia) che termina in B. Quante traiettorie diverse può aver compiuto?



(A) 24 **(B)** 26 **(C)** 28 **(D)** 32 **(E)** nessuna delle precedenti.

12) Una stazione spaziale vuole registrare il passaggio di un asteroide, che si muove nello spazio di moto rettilineo uniforme rispetto ad essa. Purtroppo il radar della stazione è danneggiato, e non fornisce misure affidabili della distanza, mentre misura con accuratezza l'angolo sotto il quale è visto l'asteroide. Vengono effettuati alcuni rilevamenti a intervalli di tempo regolari. Qual è il minimo numero di rilevamenti necessari per ricostruire la traiettoria dell'asteroide?
(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** un numero finito maggiore di 4
(E) nessun numero di rilevamenti è sufficiente.

13) Date le uguaglianze a sinistra, quale delle affermazioni a destra è vera?

(I) $\dfrac{x^3-5x^2}{x^2}=\dfrac{3x-15}{3}$,

(II) $\dfrac{x-5}{1/2}=\dfrac{3x-15}{3/2}$,

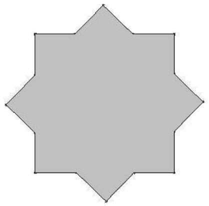
(III) $\dfrac{x-5}{2}=x-\dfrac{5}{2}$

(A) (I), (II) e (III) sono vere per ogni x reale
(B) (I), (II) e (III) sono false per ogni x reale
(C) per ogni x reale, se (II) è vera lo è anche (III)
(D) per ogni x reale, se (II) è vera lo è anche (I)
(E) per ogni x reale, se (I) è vera allora (III) è falsa.

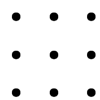
14) Quanti sono i numeri interi positivi n per i quali $8n+50$ è un multiplo di $2n+1$?
(A) Nessuno **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 5 **(E)** 10.

15) Se vale l'identità $\left(x-\frac{3}{2}\right)^3+\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+(x+1)^3+(x+2)^3=ax^3+bx^2+cx+d$, quanto vale $a+b+c+d$?
(A) $\dfrac{57}{4}$ **(B)** 9 **(C)** $\dfrac{289}{8}$ **(D)** 35 **(E)** nessuno dei valori precedenti.

16) Determinare l'area del poligono ottenuto come unione di due quadrati entrambi aventi lato di lunghezza 1, aventi lo stesso centro e ruotati di 45° l'uno rispetto all'altro.
(A) $4-2\sqrt{2}$ **(B)** $\dfrac{9}{8}$ **(C)** $2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **(D)** $\dfrac{5}{4}$
(E) le precedenti risposte sono sbagliate.



17) Sono dati 9 punti disposti a quadrato come nella figura a fianco. Quanti sono i possibili triangoli non degeneri che hanno i vertici in tre dei punti dati?
(A) 27 **(B)** 56 **(C)** 60 **(D)** 76 **(E)** 84.

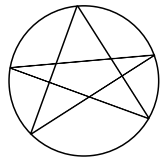


18) Giovanni ha bevuto troppo e comincia a camminare in modo strano:
– fa 1 passo in avanti;
– poi si volta di 90° verso destra e fa 2 passi in avanti;
– poi si volta di 90° verso destra e fa 1 passo in avanti;
– poi si volta di 90° verso sinistra e fa 1 passo all'indietro;
– dopo di che ricomincia da capo.
Ogni passo è di 1 metro. Dopo 186 passi cade a terra svenuto. A quanti metri da dove era partito finisce la passeggiata di Giovanni?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** $\sqrt{5}$ **(E)** 4.

19) Anna e Marco hanno una collezione di più di 40, ma meno di 80, cartoline. Anna nota che il numero delle cartoline meno 3 è multiplo di 8. Marco invece nota che il numero di cartoline meno 1 è multiplo di 5. Quante cartoline hanno in totale Anna e Marco?
(A) Tra 40 e 49 **(B)** tra 50 e 59 **(C)** tra 60 e 69 **(D)** tra 70 e 79
(E) è impossibile: hanno sbagliato a contare.

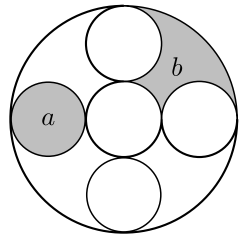
20) Il polinomio $x^4-2x^3-7x^2-2x+1$ ha quattro radici reali a, b, c, d. Quanto vale $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$?
(A) -2 **(B)** 0 **(C)** -1 **(D)** 2 **(E)** nessuno dei valori precedenti.

21) Sia data una stella a cinque punte inscritta in una circonferenza. Quanto vale la somma degli angoli con vertice nelle punte della stella?
(A) 100° **(B)** 150° **(C)** 180° **(D)** 200°
(E) i dati a disposizione sono insufficienti.



22) Si consideri l'insieme $\{1,2,\ldots,2003\}$. Quanti sono i suoi sottoinsiemi B tali che la somma degli elementi di B è uguale a 2 007 000?
(A) Non ne esistono **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 1002 **(E)** 2003.

23) Dette a e b le aree delle figure in grigio, dire quale fra le seguenti relazioni è valida (tutti i cerchi piccoli hanno lo stesso raggio r e i 4 tangenti a quello grande hanno i centri sui vertici di un quadrato).
(A) $a<b$, qualunque sia r **(B)** $a=b$, qualunque sia r
(C) $a>b$, qualunque sia r
(D) $a<b$ oppure $a=b$, dipende dal valore di r
(E) $a>b$ oppure $a=b$, dipende dal valore di r.



24) Il potente computer di Enrico è stato da poco infettato da un virus che cancella un po' alla volta tutta la memoria. Ogni minuto che passa, la regione cancellata viene quadruplicata, e ulteriormente incrementata di 1 byte. Enrico congela il computer quando ormai la situazione è compromessa: egli calcola che non solo tra un minuto il virus avrà corrotto tutta la memoria, ma anzi ormai basterebbe triplicare la regione cancellata e aggiungere 1 byte per esaurire esattamente la memoria del computer, che ammonta a 2.5 Gb $=2.5\cdot 2^{30}$ byte. Quanto era grande la regione cancellata 14 minuti fa?
(A) 1 byte **(B)** 2 byte **(C)** 3 byte **(D)** 4 byte **(E)** 16 byte.

25) Sul triangolo ABC si costruisce una piramide di vertice V e base ABC. P è un punto sullo spigolo VA tale che BP e CP siano fra loro ortogonali e siano altezze rispettivamente dei triangoli BAV e CAV. Sapendo che P divide VA in due segmenti di lunghezza 1 cm e 2 cm e che le altezze BP e CP sono lunghe rispettivamente 3 cm e 4 cm, determinare il volume (in cm^3) della piramide.
(A) I dati non sono sufficienti per calcolare il volume **(B)** 6 **(C)** 9 **(D)** 12
(E) non esiste una piramide siffatta.

I Giochi di Archimede - Soluzioni Triennio

19 novembre 2003

D	D	C	C	C	C	A	E	D	B	A	E	E	B	D	A	D	C	B	D	C	C	B	C	B
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) La risposta è **(D)**. Infatti $\frac{3^{5/2}}{3^{2/3}} = 3^{5/2}3^{-2/3} = 3^{5/2-2/3} = 3^{11/6}$.

2) La risposta è **(D)**. Siccome la somma dei numeri naturali da 1 a n vale $\dfrac{n(n+1)}{2}$, la loro media vale $\dfrac{n+1}{2}$, per cui n è ammissibile se e solo se $\dfrac{n+1}{2} < 2003$, cioè se e solo se $n < 4005$. Il massimo di tali n è dunque 4004.

Seconda soluzione.

Immaginiamo di scrivere i numeri naturali da 1 a n in ordine crescente e indichiamo con $M(n)$ la loro media aritmetica. Allora $M(n)$ vale il numero centrale dell'elenco se n è dispari e la media dei due numeri centrali dell'elenco se n è pari. Allora il numero richiesto deve essere vicino al doppio di 2002 e qualche semplice tentativo porta a concludere che: $M(4004) = \dfrac{2002+2003}{2} < 2003$ e $M(4005) = 2003$. Se poi $n > 4005$ è chiaro che $M(n) > 2003$. Dunque la risposta esatta è 4004.

3) La risposta è **(C)**. Sia $\beta = \dfrac{b}{a}$ e $\gamma = \dfrac{c}{a}$. Per il fatto che b e c sono multipli di a, β e γ sono interi. Scriviamo la disuguaglianza triangolare relativa al lato a:

$$a > |c-b| = |a\gamma - a\beta| = a \cdot |\gamma - \beta|$$

e quindi, semplificando a, otteniamo

$$1 > |\gamma - \beta|$$

e poiché γ e β sono interi non può essere che $|\gamma - \beta| = 0$, da cui segue $b = c$. Quindi il triangolo dev'essere isoscele: la risposta **(C)** è quindi corretta. Un controesempio alle risposte **(A)**, **(B)** ed **(E)** è fornito dal triangolo equilatero di lato 1. Usando il teorema di Pitagora, si può inoltre dimostrare che anche la risposta **(D)** non è corretta.

4) La risposta è **(C)**. Tullio spera che le tre palline da lui estratte siano di tre colori diversi. La prima pallina che Tullio osserva, fra le tre estratte, può essere di qualsiasi colore. La probabilità che la seconda sia di colore diverso dalla prima è $\dfrac{6}{8}$; la probabilità che la terza sia di colore diverso dalle prima due è $\dfrac{3}{7}$. La probabilità che le tre palline siano di colori diversi è pertanto $\dfrac{6}{8} \cdot \dfrac{3}{7} = \dfrac{9}{28}$.

Seconda soluzione.

La probabilità desiderata è il rapporto fra il numero di insiemi "vincenti" e il numero dei sottoinsiemi con 3 elementi di un insieme che ne ha 9; quindi

$$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{\binom{9}{3}} = \frac{27 \cdot 3!}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{9}{28}\ .$$

5) La risposta è **(C)**. Detta s la lunghezza del percorso (sola andata), i tempi di percorrenza per l'andata e il ritorno sono $t_1 = \frac{s}{v}$ (andata), $t_2 = \frac{s}{3v}$ (ritorno). La velocità media nell'intero viaggio sarà quindi:

$$\frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v} + \frac{s}{3v}} = 2s\frac{3v}{4s} = \frac{3}{2}v \ .$$

6) La risposta è **(C)**. Le prime tre affermazioni si contraddicono vicendevolmente, quindi al piú una di esse può essere vera, quindi ci sono almeno due affermazioni false, tra cui certamente la prima. Inoltre una delle due ultime affermazioni deve essere vera, e quindi la quarta è certamente vera. D'altra parte la quarta affermazione è compatibile con ciascuna delle precedenti, che esauriscono le possibilità residue: quindi anche una di esse è vera.

7) La risposta è **(A)**. La a) equivale a $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 \geq 0$, la b) equivale a $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 0$, la c) è $(x^2 - x)^2 \geq 0$.

Seconda soluzione.

Tutte e tre le diseguaglianze date sono soddisfatte per ogni valore positivo di x. Infatti

$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ e un quadrato non può essere negativo.

$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ è una somma di quadrati e quindi è sempre positiva.

$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x-1)^2$ è il prodotto di due quadrati e quindi non può essere negativo.

8) La risposta è **(E)**. Il totale dei punti di Michael, Juan Pablo e Kimi è 125. Poiché in ogni gara ci sono 25 punti a disposizione, essi hanno preso tutti i punti disponibili, e dunque si sono piazzati sempre primo, secondo e terzo. Rispetto al massimo possibile di 50 punti, Michael ne ha persi 7. Potendone perdere 2 (piazzandosi secondo) oppure 3 (piazzandosi terzo), l'unica possibilità è che si sia piazzato due volte secondo e una volta terzo. Juan Pablo, che ha perso 8 punti rispetto al massimo possibile, potrebbe essersi piazzato 2 volte terzo e una volta secondo oppure 4 volte secondo. Ma quest'ultima possibilità è esclusa, poiché, avendo Michael collezionato due secondi posti, nessun altro può essersi classificato secondo più di 3 volte. Per esclusione, Kimi deve essersi piazzato 2 volte secondo e 2 volte terzo.

Seconda Soluzione.

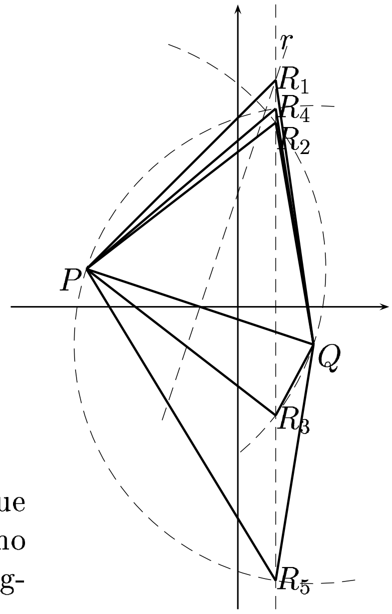
Una soluzione semplice si può trovare considerando il resto nella divisione per 3 dei punteggi dei tre concorrenti: i punteggi attribuiti primo e del terzo classificato hanno resto 1, quello del secondo ha resto 2. Pertanto, si vede rapidamente che:

piazzamenti	**resto nella divisione per 3 del punteggio**
ogni volta primo o terzo	$1+1+1+1+1 = 5$, resto 2
una volta secondo	$2+1+1+1+1 = 6$, resto 0
due volte secondo	$2+2+1+1+1 = 7$, resto 1
tre volte secondo	$2+2+2+1+1 = 8$, resto 2
quattro volte secondo	$2+2+2+2+1 = 9$, resto 0
cinque volte secondo	$2+2+2+2+2 = 10$, resto 1

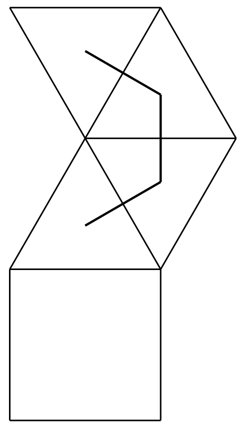
Del resto, il punteggio di Michael ha resto 1, quello di Juan Pablo 0 e quello di Kimi 1. Quindi Michael e Kimi devono essersi qualificati secondi per due volte ciascuno e Juan Pablo una volta sola. La risposta esatta allora è **(E)**. Si verifica in effetti che i piazzamenti possono essere stati questi:

Gara	1	2	3	4	5
Michael	10	10	8	8	7
Juan Pablo	7	7	10	10	8
Kimi	8	8	7	7	10

9) La risposta è **(D)**. Siano $P = (-4, 1)$, $Q = (2, -1)$, r la retta $x = 1$. Intersecando r con l'asse di PQ si ottiene un punto R_1 tale che il triangolo PQR_1 è isoscele sulla base PQ.
La circonferenza con centro P e raggio PQ taglia la retta r in due punti R_2 e R_3 tali che ciascuno dei triangoli PQR_2, PQR_3 è isoscele, avendo i lati che si congiungono in P uguali fra loro. La circonferenza con centro Q e raggio PQ taglia la retta r in due punti R_4 e R_5 tali che ciascuno dei triangoli PQR_4, PQR_5 è isoscele, avendo i lati che si congiungono in Q uguali fra loro. Ci sono quindi cinque triangoli isosceli del tipo voluto.



10) La risposta è **(B)**. Il percorso più breve che unisce due centri di due facce laterali contigue della piramide si trova considerando sul piano due triangoli equilateri aventi un lato in comune e unendo con un segmento i due relativi baricentri.
Tale segmento giace sulle altezze dei due triangoli relative al lato comune. Dal momento che il baricentro dista dalla base $\frac{1}{3}$ dell'altezza, il nostro segmento sarà lungo $\frac{2}{3}$ dell'altezza h di un triangolo equilatero di lato 2. Sapendo che $h = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, si ha che il segmento è lungo $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.
Si osserva infine che il percorso del ragno è lungo quanto 3 di questi segmenti (sufficienti ad unire i quattro centri). Il ragno percorre quindi un tragitto lungo $2\sqrt{3}$.
Nota. Si è cercato il tragitto più breve tra quelli che passano da un centro ad un altro attiguo, è facile osservare che un qualsiasi altro ordine dei vertici da percorrere determina tragitti più lunghi di quello trovato.



11) La risposta è **(A)**. Il rospo dovrebbe fare 2 salti in avanti e 2 a destra; quindi per arrivare in 6 salti deve farne uno "sbagliato" (indietro o a sinistra) e uno in piú (avanti o a destra) per recuperare.
Supponiamo che il salto sbagliato sia indietro, e che quindi ce ne siano 3 avanti e 2 a destra. Se il salto indietro non è né il primo né l'ultimo, allora deve essere immediatamente preceduto e seguito dai salti a destra, altrimenti il rospo passerebbe due volte sulla stessa foglia; gli altri tre salti sono necessariamente in avanti. Dunque vi sono 4 possibili percorsi, secondoché il salto indietro è il secondo, il terzo, il quarto o il quinto. Se invece il salto indietro è il primo, allora il secondo è a destra necessariamente, mentre l'altro salto a destra può essere indifferentemente uno qualunque degli ultimi quattro. Quindi si hanno altri 4 percorsi. Analogamente si ottengono 4 percorsi in cui l'ultimo salto è indietro (e quindi il penultimo e uno dei primi quattro sono a destra). In totale abbiamo dunque 12 percorsi con un salto indietro.
Senza dover rifare il ragionamento sappiamo che vi saranno 12 percorsi con un salto a sinistra, ottenuti scambiando le verticali con le orizzontali, ossia considerando la simmetria rispetto alla diagonale AB (che scambia avanti con destra e indietro con sinistra). Quindi la risposta è 24.

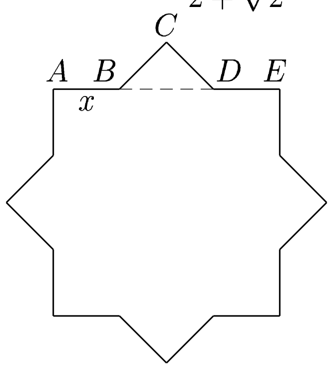
12) La risposta è **(E)**. Data una traiettoria r per l'asteroide, una qualsiasi traiettoria ad essa omotetica rispetto alla stazione fornisce le stesse rilevazioni, quindi non può essere determinata in modo univoco, a meno che l'asteroide non si scontri con la stazione, evento assolutamente da evitare!

13) La risposta è **(E)**. La (I) è falsa solo per $x = 0$, perché il denominatore si annulla e non si può semplificare. La (II) è ovviamente sempre vera. La (III) è vera solo per $x = 0$, come si vede risolvendo l'equazione di primo grado. Quindi solo la risposta **(E)** è accettabile.

14) La risposta è **(B)**. Poiché $8n + 50 = 4(2n + 1) + 46$, $8n + 50$ è un multiplo di $2n + 1$ se e solo se 46 è un multiplo di $2n + 1$. L'unico divisore di 46 della forma $2n + 1$ con n positivo è 23.

15) La risposta è **(D)**. Dato che il valore di un polinomio calcolato in 1 è precisamente la somma dei coefficienti, basta sostituire $x = 1$ nel membro sinistro dell'identità, ottenendo
$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2^3 + 3^3 = 35.$

16) La risposta è **(A)**. I segmenti AB, BC, CD e ED hanno la stessa lunghezza che indichiamo con x. Il lato BD è l'ipotenusa del triangolo BCD rettangolo e isoscele, per cui la sua misura vale $x\sqrt{2}$. La lunghezza del lato AE, che sappiamo essere pari a 1, vale quanto la somma delle lunghezze di AB, BD e DE, cioè abbiamo: $1 = x + x\sqrt{2} + x$. Risolvendo si ha $x = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$.
L'area del triangolo BDC vale:



$$\frac{1}{2}x \cdot x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \sqrt{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

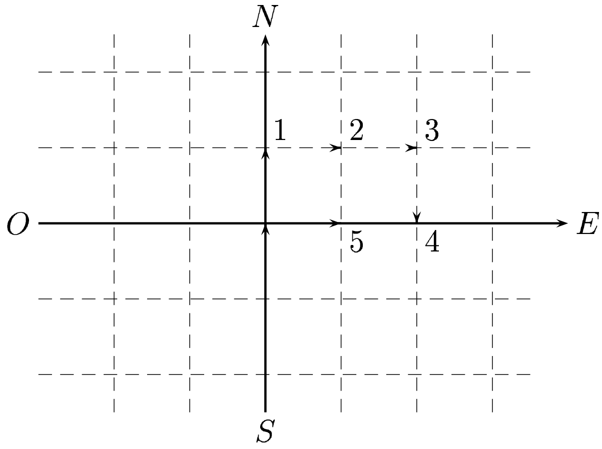
L'area della figura si ottiene sommando l'area di un quadrato di lato 1 con le aree di 4 triangoli di area pari a quella di BCD per cui l'area richiesta vale: $1 + 4\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 4 - 2\sqrt{2}$.

17) La risposta è **(D)**. Ogni triangolo è identificato univocamente dai suoi tre vertici: quindi dobbiamo contare i diversi modi di scegliere tre vertici non allineati tra i nove punti presenti.
I modi di scegliere tre punti qualunque tra i nove presenti sono uguali alle combinazioni di tre elementi su nove, cioè

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$$

Però, ci sono 8 scelte che corrispondono a punti allineati (e quindi triangoli degeneri) nel diagramma: i punti allineati secondo una linea orizzontale o verticale o secondo una delle diagonali maggiori. I triangoli effettivamente costruibili sono perciò $84 - 8 = 76$.

18) La risposta è **(C)**. Detta “origine” la posizione iniziale di Giovanni, e “Nord” la direzione in cui è rivolto, si nota che dopo i primi 5 passi (vedi figura a fianco) Giovanni si trova nel punto (1, 0) e guarda a Est. Perciò ogni 5 passi Giovanni si trova spostato di un solo passo verso destra, ruotato di 90° verso destra. Dopo $4 \cdot 5 = 20$ passi, Giovanni si ritroverà nell'origine, rivolto a Nord, ossia nella stessa posizione iniziale. Dopo i primi 180 passi (multiplo di 20) Giovanni è ancora al punto di partenza, rivolto a Nord. Con altri 5 passi si trova nel punto (1, 0) e guarda a Est; con un ulteriore passo avanti (il 186−esimo) raggiungerà il punto (2, 0), a due metri dal punto di partenza.



19) La risposta è **(B)**. Sia n il numero delle cartoline di Anna e Marco. Abbiamo $n = 8a + 3$ ed $n = 5b + 1$ per opportuni interi a, b. Poiché $40 \leq n \leq 79$, dobbiamo avere $5 \leq a \leq 9$, cioè $n = 43, 51, 59, 67, 75$. L'unico di questi numeri della forma $5b + 1$ è 51.

20) La risposta è **(D)**. Si osservi anzitutto che se α è radice del polinomio dato, anche $\frac{1}{\alpha}$ lo è. Infatti α è diverso da 0, e dividendo per α^4 si ottiene precisamente $1 - \frac{2}{\alpha} - \frac{7}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^4} = 0$. (Si poteva evitare il calcolo osservando che il polinomio è palindromo). Quindi l'insieme dei reciproci delle radici coincide con l'insieme delle radici, e dunque la somma delle radici coincide con la somma dei loro reciproci. Ma la somma delle radici di un polinomio monico è l'opposto del secondo coefficiente.

Seconda soluzione.

Se a, b, c, d sono le radici del polinomio dato, si ha

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1,$$

quindi $1 = abcd$ e $2 = abc + abd + acd + bcd$.

D'altra parte

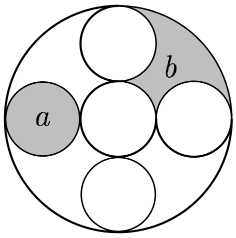
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{bcd + acd + abd + abc}{abcd}.$$

Quindi la somma dei reciproci delle radici è 2.

21) La risposta è **(C)**. Ciascuno dei cinque angoli della stella è un angolo alla circonferenza, e ognuno di essi è sotteso da un arco. L'unione di tali archi copre tutta la circonferenza, e la somma delle lunghezze di tali archi è proprio la lunghezza dell'intera circonferenza. È noto che gli angoli alla circonferenza sottesi da un'arco sono ampi la metà degli angoli al centro corrispondenti. La somma degli angoli aventi i vertici nelle punte è metà dell'angolo al centro sotteso da tutta la circonferenza, ovvero un angolo giro, da cui la somma è $\frac{360°}{2} = 180°$.

22) La risposta è **(C)**. La somma dei numeri interi da 1 a n è uguale a $\frac{n(n+1)}{2}$ e dunque la somma di tutti gli interi da 1 a 2003 è uguale a 2 007 006. Ne segue che un sottoinsieme di $\{1, 2, \ldots, 2003\}$ è tale che la somma dei suoi elementi è uguale a 2 007 000 se, e soltanto se, la somma degli elementi del suo complementare è uguale a 6. È pertanto equivalente contare questi ultimi. Essi sono evidentemente solamente $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$ $\{6\}$.

23) La risposta è **(B)**. I cerchi piccoli hanno infatti il diametro pari a $\frac{1}{3}$ di quello del cerchio grande, e dunque l'area di ognuno di essi è uguale a $\frac{1}{9}$ di quella del cerchio grande. L'area della porzione del cerchio grande "al di fuori" dei cerchi piccoli è dunque uguale a $\frac{4}{9}$ dell'area del cerchio grande. La porzione precedente è però divisa in quattro figure uguali (di cui una è la figura b), ognuna delle quali ha area uguale a $\frac{1}{9}$ dell'area del cerchio grande.



24) La risposta è **(C)**. Se n denota il numero di byte compromessi in un certo istante, dopo un minuto questi diventano $4n+1$, poi 4^2n+4+1, poi 4^3n+4^2+4+1, e così via, fino a che dopo 14 minuti sono

$$4^{14}n + 4^{13} + \cdots + 4 + 1 = n \cdot 2^{28} + 2^{26} + \cdots + 2^2 + 1$$

Il doppio di questo numero è $2n \cdot 2^{28} + 2^{27} + \cdots + 2^3 + 2$, quindi il triplo (sommando) è

$$3n \cdot 2^{28} + 2^{27} + 2^{26} + \cdots + 2 + 1 = 3n \cdot 2^{28} + 2^{28} - 1$$

Uguagliando l'ultimo valore con la memoria totale del PC meno un byte, $2.5 \cdot 2^{30} - 1 = 10 \cdot 2^{28} - 1$, si trova che $3n+1 = 10$ e quindi $n = 3$.

Per convincersi che $2^{27} + 2^{26} + \cdots + 2 + 1 = 2^{28} - 1$ si può usare il prodotto notevole $x^{28} - 1 = (x-1)(x^{27} + x^{26} + \cdots + x + 1)$ con $x = 2$, oppure sommare 1 a entrambi i membri, notando che

$$\begin{aligned} 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 \cdots + 2^{27} &= 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{27} \\ &= 2^2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{27} = \cdots = 2^{27} + 2^{27} = 2^{28} \end{aligned}$$

25) La risposta è **(B)**. Poiché il segmento CP è ortogonale sia al lato VA che al segmento BP, esso è ortogonale al piano contenente la faccia VAB della piramide. Ma allora considerando VAB come base della piramide è facile calcolarne il volume: in VAB il segmento BP è l'altezza relativa al lato VA e quindi l'area di VAB in cm^2 è pari a

$$\frac{VA \cdot BP}{2} = \frac{(1+2)3}{2} = \frac{9}{2};$$

allora, visto che CP è l'altezza della piramide relativa a VAB, il suo volume vale in cm^3

$$\frac{(\text{area } VAB) \cdot CP}{3} = \frac{9 \cdot 4}{3} = 6.$$

Seconda soluzione.

La retta AV, essendo perpendicolare a CP e BP, è perpendicolare al piano BCP. La piramide $ABCV$ viene così scomposta da BCP in due piramidi aventi BCP come base, e PV, PA come rispettive altezze. Il volume di $ABCV$ è la somma dei volumi di queste due piramidi, e cioè

$$\frac{1}{3}(\text{area } BCP) \cdot (AP + VP) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot (1+2) = 6 \ .$$