PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Biennio

17 novembre 2004

1) *La prova consiste di 20 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.*
2) *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
3) *Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia.* NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) *Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.*

Nome ____________ *Cognome* ____________ *Classe* ______

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*

1) Secondo una recente statistica, ogni italiano mangia in media 30 kg di pasta all'anno. Sapendo che la popolazione italiana è di 57 milioni di abitanti, quante tonnellate di pasta si consumano in Italia ogni anno?
(A) meno di 1000, **(B)** più di 1000, ma meno di 10 mila, **(C)** più di 10 mila, ma meno di 100 mila, **(D)** più di 100 mila, ma meno di 1 milione, **(E)** più di 1 milione.

2) Luigi ha 4 anni più di Silvio che, a sua volta, ha 3 anni più di Carlo. Se complessivamente hanno 34 anni, quanti anni ha il più grande?
(A) 12, **(B)** 15, **(C)** 17, **(D)** 18, **(E)** 20.

3) Tarzan vuole tenere il suo leone in una radura di forma circolare avente raggio 12 metri e con un alto albero nel centro. Per fare in modo che il leone non scappi, lo lega con una catena all'albero centrale, ma al momento di fissarla si accorge che la catena è lunga 13 metri anziché 12. Non potendo in alcuna maniera accorciare la catena, decide di legarla più in alto, in modo che il leone possa raggiungere il limite della radura, senza uscirne. A quanti metri di altezza dal suolo Tarzan lega la catena? (Si trascurino il diametro dell'albero e, solo per questo esercizio, le dimensioni del leone).
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 3, **(D)** 4, **(E)** 5.

4) Se $a+1=b-2=c+3=d-4$, qual è il piú piccolo dei numeri a, b, c, d?
(A) a, **(B)** b, **(C)** c, **(D)** d, **(E)** non si può stabilire in base ai dati del problema.

5) Ad una gara matematica partecipano 1200 candidati. Il 40% di essi riceve una medaglia (d'oro, d'argento o di bronzo). Il numero di medaglie di bronzo è triplo di quello di medaglie d'oro; il numero di medaglie d'argento è doppio di quello di medaglie d'oro. Quante sono le medaglie d'argento?
(A) 120, **(B)** 144, **(C)** 160, **(D)** 180, **(E)** nessuna delle precedenti.

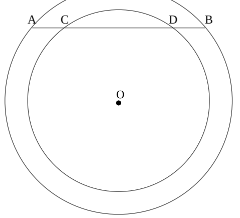
6) Tre amici stanno conversando. Uno di loro dice: "Almeno due di noi sono bugiardi." Un altro ribatte: "Non è vero!". Quanti sono i bugiardi?
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 3, **(D)** i dati sono incongruenti, **(E)** non si può determinare in modo univoco.

7) a, b e c sono tre numeri naturali. Sappiamo che a è divisibile per 15, b è divisibile per 12 e c è divisibile per 21. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?
(A) $a^2+b^2+c^2$ è divisibile per 18, **(B)** $a+b+c$ è divisibile per 9, **(C)** $a+b+c$ è divisibile per 2, **(D)** $(a+b+c)^2$ è divisibile per 9, **(E)** $a^2+b^2+c^2$ è divisibile per 15.

8) Sulla lavagna è scritto inizialmente il numero 1. Successivamente, dieci studenti a turno cancellano il numero che trovano sulla lavagna e lo sostituiscono con il suo doppio aumentato di 1. Qual è il numero che resta sulla lavagna alla fine?
(A) 31, **(B)** $2^{11}+1$, **(C)** $2^{11}-1$, **(D)** 3^{10}, **(E)** 2005.

9) Marco deve recarsi una volta all'anno, per lavoro, in un lontano Paese dalla dissestata economia, nel quale da un anno all'altro i prezzi raddoppiano. Tuttavia la moneta di quel Paese perde ogni anno il 30 per cento del suo valore rispetto all'Euro. La spesa (in Euro) sostenuta da Marco per il suo soggiorno nel 2004 risulta pertanto
(A) minore di quella del 2002, **(B)** uguale a quella del 2002, **(C)** superiore a quella del 2002, ma minore del doppio di essa, **(D)** uguale al doppio della spesa del 2002, **(E)** uguale al quadruplo della spesa del 2002.

10) Quanto è lunga la corda AB sapendo che $AB = 2CD$ e che i raggi dei due cerchi concentrici sono 5 metri e 4 metri?
(A) $2\sqrt{2}$ m, **(B)** $2\sqrt{3}$ m, **(C)** $3\sqrt{3}$ m, **(D)** $4\sqrt{3}$ m, **(E)** dipende dall'inclinazione della corda.

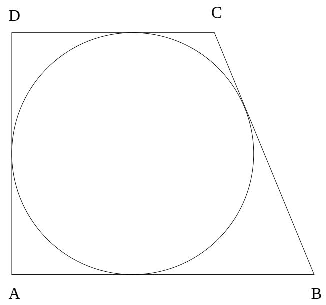


11) Quante sono le coppie ordinate di numeri naturali (x, y), $x > 0$ e $y > 0$, tali che $5 < x+y \leq 10$? (Attenzione: si considerano coppie ordinate, quindi, ad esempio,

le coppie $(3,4)$ e $(4,3)$ sono distinte tra loro).
(A) 20, **(B)** 25, **(C)** 30, **(D)** 35, **(E)** nessuna delle precedenti.

12) Michele si prepara all'ultimo compito in classe di matematica dell'anno; lo affronta con tranquillità, sapendo che se prenderà 10 avrà la media del 9, mentre prendendo 5 la media diverrà 8. Quanti compiti ha già fatto quest'anno Michele?
(A) 2, **(B)** 3, **(C)** 4, **(D)** 5, **(E)** i dati non sono sufficienti per dare la risposta.

13) Il trapezio rettangolo $ABCD$ contiene una circonferenza di raggio 1 metro, tangente a tutti i suoi lati. Sapendo che il lato obliquo BC è lungo 7 metri, trovare l'area del trapezio.
(A) 8 metri quadrati, **(B)** 9 metri quadrati, **(C)** 10 metri quadrati, **(D)** 11 metri quadrati, **(E)** non si può ricavare dai dati del problema.

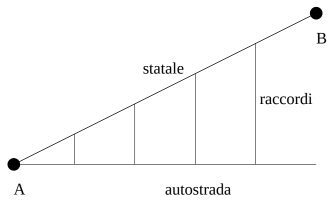


14) Venti soffici cuscini quadrati sono impilati uno sopra l'altro. Ogni cuscino pesa 500g ed ha inizialmente uno spessore di 30cm. Nella pila, però, lo spessore di ogni cuscino si riduce in ragione di 2cm per ogni chilo di peso sopra di esso (1cm per ogni mezzo chilo). Quanto è alta la pila di cuscini?
(A) 220cm, **(B)** 410cm, **(C)** 490cm, **(D)** 581cm, **(E)** mancano dati per poter rispondere.

15) Una cassetta di legno, senza coperchio, è fabbricata con tavole spesse 2 cm. Se le dimensioni esterne della base (rettangolare) sono 38 cm e 44 cm e l'altezza esterna è 47 cm, di quanti centimetri cubi è il volume interno della cassetta?
(A) 61200 cm^3, **(B)** 63920 cm^3, **(C)** 68040 cm^3, **(D)** 75240 cm^3, **(E)** 78584 cm^3.

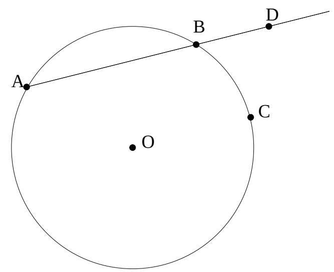
16) Dieci amici decidono di giocare una partita di calcetto, cinque contro cinque. Sapendo che vi sono due terne di fratelli, e che i tre fratelli Ambrosio desiderano giocare tutti nella squadra A mentre i tre fratelli Bianchi desiderano giocare tutti nella squadra B, in quanti differenti modi si possono formare le due squadre?
(A) 3, **(B)** 6, **(C)** 15, **(D)** 24, **(E)** 30.

17) Un automobilista deve andare dalla città A alla città B, distanti tra loro 50 km in linea d'aria, e vuole impiegare il minor tempo possibile. Può percorrere la strada statale che collega direttamente A a B, oppure può percorrere un tratto di autostrada, che passa da A e forma con la statale un angolo di 30 gradi, e prendere uno dei raccordi che partono ortogonalmente dall'autostrada e arrivano sulla statale (vedi figura).



In tutto ci sono 4 raccordi, rispettivamente dopo 10, 20, 30 e 40 km da A. Sull'autostrada la velocità massima consentita è 130 chilometri all'ora, sulla statale e sui raccordi è 90 chilometri all'ora. Quale scelta è più conveniente?
(A) percorrere solo la statale, **(B)** percorrere l'autostrada fino al primo raccordo, quest'ultimo e poi la statale, **(C)** percorrere l'autostrada fino al secondo raccordo, quest'ultimo e poi la statale, **(D)** percorrere l'autostrada fino al terzo raccordo, quest'ultimo e poi la statale, **(E)** percorrere l'autostrada fino al quarto raccordo, quest'ultimo e poi la statale.

18) Siano A, B, C tre punti su una circonferenza di centro O. Sia D un punto esterno alla circonferenza, situato sulla retta AB dalla parte di B. Sapendo che $\widehat{CBD} = 72^o$, quanto misura l'angolo $\widehat{AOC}$?
(A) 135^o, **(B)** 144^o, **(C)** 153^o, **(D)** 162^o, **(E)** 171^o.



19) Quanti sono i multipli di 5 fra i numeri interi di 4 cifre che si scrivono senza usare altre cifre all'infuori di 0, 1, 2, 3, 4, 5 ? (È consentito impiegare più volte la stessa cifra; 0 non può essere la cifra iniziale).
(A) 180, **(B)** 216, **(C)** 360, **(D)** 396, **(E)** 1080.

20) Sia data nel piano una circonferenza di raggio 3. Consideriamo tutti i punti P del piano tali che la circonferenza di centro P e raggio 2 interseca in almeno un punto la circonferenza data. Questi punti formano
(A) la circonferenza data, **(B)** una circonferenza più grande di quella data, **(C)** un cerchio, **(D)** una corona circolare, **(E)** l'unione di due circonferenze concentriche.

I Giochi di Archimede - Soluzioni Biennio

17 novembre 2004

E	B	E	C	C	E	D	C	C	D	D	C	B	B	A	B	A	B	C	D
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1) La risposta è **(E)**. I chili di pasta mangiati ogni anno sono $30 \times 57000000 = 1710 \times 10^6 = 1,71 \times 10^9$ e dunque le tonnellate sono $1,71 \times 10^6$ ovvero più di un milione.

2) La risposta è **(B)**. Indichiamo con L, S e C le età di Luigi, Silvio e Carlo rispettivamente. Sappiamo che $L + S + C = 34$, $L = S + 4$ e $S = C + 3$. Dalla seconda e dalla terza equazione abbiamo $L = C + 7$ e sostituendo i valori di L e di S rispetto a C nella prima equazione abbiamo $3C + 10 = 34$ da cui $C = 8$ e, a ritroso, $S = 11$ e $L = 15$ ovvero l'età massima.

3) La risposta è **(E)**. L'altezza a cui Tarzan deve legare la catena è la lunghezza di un cateto di un triangolo rettangolo di cui l'altro cateto è il raggio della radura e l'ipotenusa è la catena. Dal Teorema di Pitagora segue allora che l'altezza misura in metri $\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$.

4) La risposta è **(C)**. Dalla prima uguaglianza otteniamo $b = a + 3$ dunque b è maggiore di a; uguagliando il primo e il terzo termine otteniamo $a = c + 2$ quindi a è maggiore di c; questo fatto insieme al precedente ci dice che b è maggiore di c. Dalla terza uguaglianza segue $d = c + 7$ e dunque anche d è maggiore di c. In conclusione, c è minore sia di a, che di b che di d, quindi c è il minimo.

5) La risposta è **(C)**. Il numero di medaglie complessivamente assegnate è 480 (il 40 % di 1200). Indichiamo con X, Y e Z il numero delle medaglie d'oro, d'argento e di bronzo rispettivamente. I dati del problema ci dicono che $Y = 2X$ e $Z = 3X$; dunque $480 = X + Y + Z = X + 2X + 3X = 6X$ e quindi $X = 80$ e Y (ovvvero il numero richiesto) è pari a 160.

6) La risposta è **(E)**. La situazione: primo=bugiardo, secondo=non bugiardo, terzo=non bugiardo, è compatibile con le affermazioni dei tre. Ma lo stesso si può dire della situazione seguente (distinta dalla precedente): primo=non bugiardo, secondo=bugiardo, terzo=bugiardo. Dunque il numero dei bugiardi non è univocamente determinato dal problema.

7) La risposta è **(D)**. Tutti e tre i numeri sono divisibili per 3, dunque anche la loro somma $(a+b+c)$ è divisibile per 3 e quindi questa somma al quadrato, cioè $(a+b+c)^2$, è divisibile per 9. Osserviamo che le affermazioni contenute nelle risposte diverse da **(D)** sono false per $a = 15$, $b = 12$ e $c = 42$.

8) La risposta è **(C)**. La sequenza degli 11 numeri (incluso l'1 iniziale) che vengono scritti alla lavagna può essere calcolata semplicemente in maniera diretta: $1 = 2^1 - 1$, $3 = 2^2 - 1$, $7 = 2^3 - 1$, $15 = 2^4 - 1$, $31 = 2^5 - 1$, $63 = 2^6 - 1$, $127 = 2^7 - 1$, $255 = 2^8 - 1$, $511 = 2^9 - 1$, $1023 = 2^{10} - 1$, $2047 = 2^{11} - 1$. Quest'ultimo numero fornisce la risposta.

9) La risposta è **(C)**. Se S indica la spesa, in Euro, sostenuta da Marco nel 2002, quella del 2003 è: $2S - 2S\frac{30}{100} = \frac{7}{5}S$. Analogamente, la spesa sostenuta nel 2004 è pari ai sette quinti di quella del 2003, cioè $\left(\frac{7}{5}\right)^2 S = \frac{49}{25}S$. Poichè $\frac{49}{25}$ è maggiore di 1 e minore di 2, la spesa del 2004 è maggiore di quella del 2002 ma minore del doppio di essa.

10) La risposta è **(D)**. Sia H il punto medio delle corde AB e CD. Per ipotesi sappiamo che $HB = 2HD$. Applichiamo il Teorema di Pitagora ai triangoli HOD e HOB: ricaviamo le due uguaglianze $OH^2 = 16 - HD^2$ e $OH^2 = 25 - HB^2$. Dunque $9 = HB^2 - HD^2 = 4HD^2 - HD^2$ e quindi $HD = \sqrt{3}$ e $AB = 4HD = 4\sqrt{3}$.

11) La risposta è **(D)**. Consideriamo le coppie ordinate di numeri naturali la cui somma è, ad esempio, 6; queste sono: $(1,5)$, $(2,4)$, $(3,3)$, $(4,2)$ e $(5,1)$, cioè sono $5 = 6 - 1$ coppie. Allo stesso modo si trova che le coppie ordinate di numeri naturali la cui somma è 7, sono in tutto 6. In generale le coppie ordinate di numeri naturali la cui somma è un numero assegnato n, sono $n - 1$. Dunque le coppie di numeri naturali la cui somma è strettamente maggiore di 5 e minore o uguale a 10 sono in tutto: 5+6+7+8+9=35.

12) La risposta è **(C)**. Indichiamo con n il numero dei compiti già fatti e con v la somma dei voti ottenuti in questi compiti. Supponiamo che Michele prenda 10 all'ultimo compito, la media finale sarà $\frac{v+10}{n+1}$ e questa media deve essere pari a 9. Allo stesso modo, se il voto dell'ultimo compito sarà 5, la media finale, cioè $\frac{v+5}{n+1}$ sarà pari a 8. Abbiamo allora due equazioni $\frac{v+10}{n+1} = 9$ e $\frac{v+5}{n+1} = 8$ che possono essere scritte così: $v = 9n - 1$ e $v = 8n + 3$. Da queste si ricava facilmente il valore $n = 4$.

13) La risposta è **(B)**. Chiamiamo E, F, G i punti di contatto della circonferenza con i lati AB, BC e CD rispettivamente. Due segmenti aventi il primo estremo in uno stesso punto esterno a una circonferenza e tangenti ad essa nel secondo estremo, hanno la stessa lunghezza; quindi $BE = BF$ e $CF = CG$. Sappiamo inoltre che $DG = 1$ m, $AE = 1$ m e $AD = 2$ m. L'area del trapezio in metri quadri è data da $AD(AB+CD)/2 = 2(AE+EB+CG+GD)/2 = 1+(EB+CG)+1 = 2+(BF+FC) = 2+BC = 9$.

14) La risposta è **(B)**. Il primo cuscino (dal basso) ha sopra di sé un peso di $\frac{19}{2}$ kg e dunque il suo spessore diminuisce di 19 cm, diventando 11 cm; allo stesso modo il secondo diminuisce di 18 cm e il suo spessore diventa 12 cm, il terzo diminuisce di 17 cm il suo spessore diventa 13 cm e così via fino all'ultimo cuscino il cui spessore rimane di 30 cm. Lo spessore della pila di cuscini è allora pari a $(11 + 12 + 13 + \cdots + 28 + 29 + 30) = 410$ cm.

15) La risposta è **(A)**. Calcoliamo le dimensioni (altezza e dimensioni della base) interne della cassetta. L'altezza interna è pari a quella esterna meno 2 cm (perchè la cassetta non ha coperchio), ovvero 45 cm. Le dimensioni interne della base sono invece uguali a quelle esterne diminuite di 4 centimetri ciascuna, ovvero sono 34 cm e 40 cm. Il volume interno è allora $(34 \times 40 \times 45)\text{cm}^3$ cioè $61200\ \text{cm}^3$.

16) La risposta è **(B)**. Tolti i fratelli Ambrosio e i fratelli Bianchi, restano altri quattro giocatori; chiamiamoli per comodità a, b, c e d. Per risolvere il problema è sufficiente calcolare tutti i possibili modi in cui due di questi giocatori completino la squadra A dei fratelli Ambrosio, cioè tutti i modi in cui si possono scegliere due elementi distinti dell'insieme di quattro elementi $\{a,b,c,d\}$. Le possibili scelte sono 6: (a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d) e (c,d).

17) La risposta è **(A)**. Indichiamo con C una delle uscite dell'autostrada e con D il punto in cui il raccordo che parte da C arriva sulla statale; quindi ACD è un triangolo rettangolo; chiamiamo x la misura in chilometri del cateto AC, questa sarà 10, 20, 30 o 40, a seconda dell'uscita che abbiamo scelto. Calcoliamo il tempo che l'automobilista impiegherebbe per arrivare da A a D percorrendo: 1) la statale, 2) l'autostrada fino a C e il raccordo da C a D. Ricordando che l'angolo in A è di 30 gradi, la lunghezza di AD è $\frac{2x}{\sqrt{3}}$ km e dunque il tempo del percorso 1) è $\frac{x}{45\sqrt{3}}$ ore (lunghezza diviso velocità); chiamiamo T_1 questo tempo. Il tempo del percorso 2) è la somma del tempo necessario a percorrere un tratto di autostrada lungo x, cioè $\frac{x}{130}$ ore, e del tempo necessario a percorrere il raccordo CD a 90 km/h. Il segmento CD è lungo $\frac{x}{\sqrt{3}}$ km e quindi il tempo per percorrerlo a 90 km/h è di $\frac{x}{90\sqrt{3}}$ ore. Il tempo che l'automobilista impiega per il percorso 2) è allora di $\frac{x}{130} + \frac{x}{90\sqrt{3}} = x\left(\frac{1}{130} + \frac{1}{90\sqrt{3}}\right)$; chiamiamo T_2 questo secondo tempo. La differenza $T_2 - T_1$ è data da $\frac{x}{10}\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{9\sqrt{3}} - \frac{2}{9\sqrt{3}}\right) = \frac{x}{10}\left(\frac{1}{13} - \frac{1}{9\sqrt{3}}\right)$. Poichè $13^2 = 169$ è minore di $(9\sqrt{3})^2 = 81 \times 3 = 243$, $\frac{1}{13}$ è minore di $\frac{1}{9\sqrt{3}}$ e quindi $T_2 - T_1$ è maggiore di zero, cioè il tempo T_2 è maggiore di T_1. Questo vuol dire che, indipendentemente dall'uscita scelta, percorrere solo la statale richiede un tempo minore rispetto al percorso autostrada-raccordo.

18) La risposta è **(B)**. L'angolo $\widehat{ABC}$ misura $180^o - 72^o = 108^o$. Consideriamo il quadrilatero $OCBA$: la somma dei suoi angoli interni è 360^o, quindi: $\widehat{AOC} + \widehat{OCB} + \widehat{ABC} + \widehat{BAO} = 360^o$. D'altra parte, poichè i triangoli OBC e OBA sono isosceli, $\widehat{OCB} = \widehat{CBO}$ e $\widehat{BAO} = \widehat{ABO}$, quindi $\widehat{OCB} + \widehat{BAO} = \widehat{CBO} + \widehat{ABO} = \widehat{ABC} = 108^o$. Conseguentemente $\widehat{AOC} = 360^o - 108^o - 108^o = 144^o$.

19) La risposta è **(C)**. La prima cifra può essere uno qualunque tra i numeri 1, 2, 3, 4 e 5; dunque ci sono 5 scelte per la prima cifra. Per la seconda e la terza ci sono sei scelte: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Per la quarta cifra ci sono solo due scelte: 0 e 5; infatti affinchè il numero sia divisibile per 5 la sua ultima cifra deve essere 0 oppure 5. Il numero complessivo di scelte di quattro numeri tra 1, 2, 3, 4 e 5 per comporre un numero di quattro cifre divisibile per 5 è dato dal prodotto delle scelte possibili per ciascuna delle cifre, cioè: $5 \times 6 \times 6 \times 2 = 360$.

20) La risposta è **(D)**. Chiamiamo $\mathcal{C}$ la circonferenza di raggio 3 e O il suo centro. Sia P un punto con la proprietà richiesta. Se P è all'esterno di $\mathcal{C}$ e la sua distanza da O è maggiore di 5, la circonferenza centrata in P di raggio 2 è tutta all'esterno di $\mathcal{C}$ e non interseca quest'ultima (osserviamo che 5 è la somma dei raggi di $\mathcal{C}$ e della circonferenza centrata in P); invece, se P è all'esterno di $\mathcal{C}$ ma ha distanza da O minore o uguale a 5, la circonferenza centrata in P di raggio 2 interseca $\mathcal{C}$ (in uno o due punti). Quindi i punti esterni a $\mathcal{C}$ che hanno la proprietà richiesta sono quelli che hanno distanza da O minore o uguale a 5. Sia P un punto interno a $\mathcal{C}$; se P ha distanza da O minore di 1, la circonferenza centrata in P di raggio 2 è tutta contenuta in $\mathcal{C}$ e non interseca quest'ultima (osserviamo che 1 è la differenza tra il raggio di $\mathcal{C}$ e quello della circonferenza centrata in P di raggio 2); se invece la distanza da P a O è maggiore o uguale a 1, la circonferenza centrata in P di raggio 2 interseca $\mathcal{C}$ (in uno o due punti). Quindi i punti interni a $\mathcal{C}$ che hanno la proprietà richiesta sono quelli che stanno fuori dal cerchio centrato in O di raggio 1. Mettendo insieme i punti esterni e interni a $\mathcal{C}$ che hanno la proprietà richiesta, otteniamo una corona circolare con centro O, raggio interno 1 e raggio esterno 5.