

## I Giochi di Archimede - Gara Triennio

17 novembre 2004

- 1) La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
- 2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
- 3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
- 4) Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.

Nome \_\_\_\_\_ Cognome \_\_\_\_\_ Classe \_\_\_\_\_

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- 1) Se  $\sqrt{a^2 + 1} = b$ , quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?  
(A)  $a \geq 0$ , (B)  $b \geq 0$ , (C)  $a > 1$ , (D)  $b \geq a^2 + 1$ , (E) nessuna delle precedenti.
- 2) Su Marte la moda dei telefoni cellulari sta rapidamente prendendo piede. Il 17 novembre 10 marziani possiedono un cellulare e nei giorni successivi il numero dei marziani che possiedono un cellulare raddoppia ogni giorno. Quale è il primo giorno al termine del quale almeno 10000 marziani avranno un cellulare?  
(A) 25 novembre, (B) 26 novembre, (C) 27 novembre, (D) 28 novembre, (E) 29 novembre.
- 3) Tarzan vuole tenere il suo leone in una radura di forma circolare avente raggio 12 metri e con un alto albero nel centro. Per fare in modo che il leone non scappi, lo lega con una catena all'albero centrale, ma al momento di fissarla si accorge che la catena è lunga 13 metri anziché 12. Non potendo in alcuna maniera accorciare la catena, decide di legarla più in alto, in modo che il leone possa raggiungere il limite della radura, senza uscirne. A quanti metri di altezza dal suolo Tarzan lega la catena? (Solo per questo esercizio si trascurino le dimensioni del leone).  
(A) 1, (B) 2, (C) 3, (D) 4, (E) 5.
- 4)  $a$ ,  $b$  e  $c$  sono tre numeri naturali. Sappiamo che  $a$  è divisibile per 15,  $b$  è divisibile per 12 e  $c$  è divisibile per 21. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

(A)  $a^2 + b^2 + c^2$  è divisibile per 18, (B)  $a + b + c$  è divisibile per 9, (C)  $a + b + c$  è divisibile per 2, (D)  $(a + b + c)^2$  è divisibile per 9, (E)  $a^2 + b^2 + c^2$  è divisibile per 15.

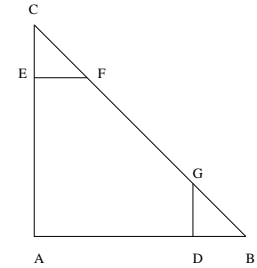
- 5) Il valore minimo di  $a \geq 0$  per cui l'equazione

$$x^2 + ax + a + 1 = 0$$

ha almeno una soluzione reale è

(A)  $2\sqrt{2} + 2$ , (B)  $2\sqrt{2} - 2$ , (C)  $3\sqrt{3} + 3$ , (D)  $3\sqrt{2} - 3$ , (E)  $2\sqrt{2} + 3$ .

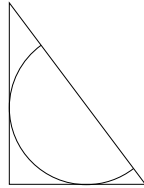
- 6) Sia  $ABC$  un triangolo rettangolo isoscele come in figura, con cateti di lunghezza  $L$ . I segmenti  $DG$  e  $EF$  sono perpendicolari ai lati  $AB$  e  $AC$  rispettivamente, inoltre i segmenti  $AE$  e  $AD$  sono lunghi  $\frac{3}{4}L$ . Sapendo che l'area del pentagono  $ADGFE$  è 7 metri quadrati, si può dire che  $L$  è uguale a  
(A) 1,5 m, (B) 3 m, (C) 1,3 m, (D) 1,6 m, (E) 4 m.



- 7) Quanti sono i multipli di 5 fra i numeri interi di 4 cifre che si scrivono senza usare altre cifre all'infuori di 0, 1, 2, 3, 4, 5? (È consentito impiegare più volte la stessa cifra; 0 non può essere la cifra iniziale).  
(A) 180, (B) 216, (C) 360, (D) 396, (E) 1080.
- 8) Marco deve recarsi una volta all'anno, per lavoro, in un lontano Paese dalla disastata economia, nel quale da un anno all'altro i prezzi raddoppiano. Tuttavia la moneta di quel Paese perde ogni anno il 30 per cento del suo valore rispetto all'Euro. La spesa (in Euro) sostenuta da Marco per il suo soggiorno nel 2004 risulta pertanto  
(A) minore di quella del 2002, (B) uguale a quella del 2002, (C) superiore a quella del 2002, ma minore del doppio di essa, (D) uguale al doppio della spesa del 2002, (E) uguale al quadruplo della spesa del 2002.
- 9) Quanti sono i numeri interi positivi  $n$  tali che  $n^2 - 14n + 24$  sia un numero primo?  
(A) nessuno, (B) 1, (C) 2, (D) 3, (E) nessuna delle precedenti risposte.
- 10) Una cassetta di legno, senza coperchio, è fabbricata con tavole spesse 2 cm. Se le dimensioni esterne della base (rettangolare) sono 38 cm e 44 cm e l'altezza esterna è 47 cm, di quanti centimetri cubi è il volume interno della cassetta?  
(A)  $61200 \text{ cm}^3$ , (B)  $63920 \text{ cm}^3$ , (C)  $68040 \text{ cm}^3$ , (D)  $75240 \text{ cm}^3$ , (E)  $78584 \text{ cm}^3$ .
- 11) Quattro amici stanno conversando. Uno di loro dice: "Almeno due di noi sono bugiardi." Il secondo aggiunge: "È vero!" Il terzo ribatte: "Non è vero!" Quanti sono i bugiardi?  
(A) 1, (B) 2, (C) 3, (D) i dati sono incongruenti, (E) mancano i dati per poter rispondere.

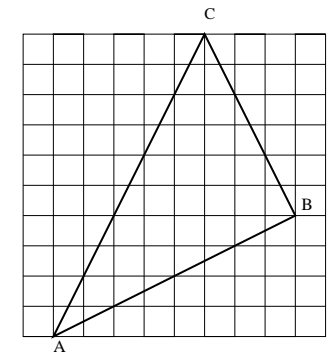
- 12) Venti soffici cuscini quadrati sono impilati uno sopra l'altro. Ogni cuscino pesa 500g ed ha inizialmente uno spessore di 30cm. Nella pila, però, lo spessore si riduce in ragione di 2cm per ogni chilo di peso sopra di esso (1cm per ogni mezzo chilo). Quanto è alta la pila di cuscini?  
 (A) 220cm, (B) 410cm, (C) 490cm, (D) 581cm, (E) mancano dati per poter rispondere.

- 13) Sia dato un triangolo rettangolo i cui cateti misurano 21 e 28 cm e un semicerchio in esso inscritto come nella figura a fianco. Quanto misura l'area del semicerchio?  
 (A)  $50\pi \text{ cm}^2$ , (B)  $\frac{441}{8}\pi \text{ cm}^2$ , (C)  $98\pi \text{ cm}^2$ , (D)  $72\pi \text{ cm}^2$ , (E)  $\frac{121}{2}\pi \text{ cm}^2$ .



- 14) Quante sono le coppie  $(a, b)$  di numeri naturali tali che  $a^2 - 4b^2 = 45$ ?  
 (A) nessuna, (B) 1, (C) 2, (D) 3, (E) più di 3.
- 15) Una colonia di amebe si moltiplica in uno stagno. Inizialmente sono presenti un'ameba chiara e un'ameba scura; poi, ogni giorno per 2004 giorni consecutivi, una ameba a caso tra quelle esistenti (tutte hanno la stessa probabilità di essere scelte, indipendentemente dalla loro età) si divide in due amebe identiche al genitore. Qual è la probabilità che ci sia una sola ameba scura nello stagno alla fine del 2004° giorno?  
 (A)  $1/2^{2004}$ , (B)  $1/2004$ , (C)  $1/2005$ , (D)  $1/(2004 \cdot 2005)$ , (E)  $2004/2005$ .
- 16) Quanti numeri interi relativi  $x$  risolvono l'equazione  $(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$ ?  
 (A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) infiniti.
- 17) Nel quadrato  $ABCD$  di lato 1 tracciamo la diagonale  $BD$  e il segmento  $CM$ , dove  $M$  è il punto medio di  $DA$ . Chiamiamo  $P$  il punto d'intersezione di  $BD$  e  $CM$ . Qual è l'area del triangolo  $DMP$ ?  
 (A)  $1/8$ , (B)  $1/10$ , (C)  $1/12$ , (D)  $1/16$ , (E) nessuna delle precedenti.
- 18) Un intero si dice *parofilo* se l'espressione decimale di ogni suo multiplo termina con almeno due cifre pari. Determinare quale dei seguenti numeri è parofilo.  
 (A) 2004, (B) 2116, (C) 2122, (D) 2740, (E) 2942.
- 19) Alberto dice: "Sono più vecchio io di Bruno"; Bruno risponde: "Carla è più giovane di me" e Carla aggiunge: "ma io sono più vecchia di Alberto". Una quarta persona afferma: "Sommando le età di Carla e Bruno si ottiene il doppio di quella di Alberto." Sapendo che una sola delle quattro affermazioni è falsa, come sono ordinate le età dei tre? (Nelle risposte  $a, b$  e  $c$  indicano le età di Alberto, Bruno e Carla rispettivamente).  
 (A)  $a < b < c$ , (B)  $b < a < c$ , (C)  $c < a < b$ , (D)  $c < b < a$ , (E) non si può determinare.

- 20) Quanto vale il raggio del cerchio inscritto nel triangolo  $ABC$  in figura, se l'unità di misura di lunghezza  $u$  è pari al lato di un quadratino?  
 (A)  $\sqrt{2} u$ , (B)  $\sqrt{3} u$ , (C)  $2 u$ , (D)  $\sqrt{5} u$ , (E)  $\sqrt{6} u$ .



- 21) Una successione di numeri è costruita in questo modo: il primo termine è 1, il secondo è 2 e, a partire dal terzo termine, ogni termine è il prodotto dei due precedenti. Quanto vale il tredicesimo termine?  
 (A)  $2^{12}$ , (B)  $2^{83}$ , (C)  $2^{144}$ , (D)  $2^{2048}$ , (E)  $2^{4096}$ .
- 22) Quante soluzioni positive ha l'equazione  $1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/x)) = x$ ?  
 (A) 0, (B) 1, (C) 2, (D) 3, (E) infinite.
- 23) Su una striscia molto lunga sono scritte di seguito, in ordine alfabetico, tutte le parole di 4 lettere (incluse quelle prive di significato) ottenibili con le 21 lettere del nostro alfabeto a partire da AAAA. Qual è la 2004-esima lettera scritta?  
 (A) L, (B) M, (C) P, (D) T, (E) nessuna delle precedenti.
- 24) In un triangolo  $ABC$  si tracciano le bisettrici da  $B$  e da  $C$  che incontrano rispettivamente i lati  $AC$  e  $AB$  in  $D$  ed  $E$ . Detto  $I$  il punto di incontro delle bisettrici, si sa che il quadrilatero  $IDAE$  è inscritto in una circonferenza. Allora l'angolo in  $A$  vale  
 (A)  $30^\circ$ , (B)  $45^\circ$ , (C)  $60^\circ$ , (D)  $90^\circ$ , (E) non si può determinare in modo univoco.
- 25) Pierino ha 10 mele, quattro delle quali sono marce. Egli le ripartisce in due sacchetti (non necessariamente lo stesso numero in ciascun sacchetto, ma non meno di 3 mele in ogni sacchetto), e propone ad un suo amico di scegliere un sacchetto, e successivamente di estrarre una mela dal sacchetto scelto. Come dovrà comporre i due sacchetti affinché sia massima la probabilità che il suo amico estragga una mela marcia?  
 (A) La composizione non conta: la probabilità è in ogni caso  $4/10$ , (B) due mele marce e tre buone in ciascun sacchetto, (C) tre mele marce e due buone in un sacchetto, le rimanenti cinque nell'altro, (D) tutte e quattro le mele marce in un sacchetto, le rimanenti sei nell'altro, (E) tre mele marce in un sacchetto, le rimanenti sette nell'altro.

# I Giochi di Archimede - Soluzioni Triennio

17 novembre 2004

B	C	E	D	A	E	C	C	C	A	B	B	D	D	C	C	C	D	B	D	C	B	D	C	E
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- 1) La risposta è **(B)**. Infatti  $b$  è la radice quadrata (con segno  $+$ ) di un numero reale, e quindi è maggiore o uguale a zero.
- 2) La risposta è **(C)**. Vediamo come aumenta il numero di marziani che possiedono un cellulare nei giorni successivi al 17 novembre: 10 (17 novembre), 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560, 5120, 10240 (27 novembre). Il primo giorno in cui almeno 10000 marziani possiedono un cellulare è quindi il 27 novembre.
- 3) La risposta è **(E)**. L'altezza a cui Tarzan deve legare la catena è la lunghezza di un cateto di un triangolo rettangolo di cui l'altro cateto è il raggio della radura e l'ipotenusa è la catena. Dal Teorema di Pitagora segue allora che l'altezza misura in metri  $\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$ .
- 4) La risposta è **(D)**. Tutti e tre i numeri sono divisibili per 3, dunque anche la loro somma  $(a+b+c)$  è divisibile per 3 e quindi questa somma al quadrato, cioè  $(a+b+c)^2$ , è divisibile per 9.
- 5) La risposta è **(A)**. L'equazione ha almeno una soluzione reale se e soltanto se il discriminante del polinomio  $x^2+ax+a+1$  è maggiore o uguale a zero; questo discriminante è:  $a^2-4a-4$ , ed è quindi a sua volta un polinomio di secondo grado, in  $a$ . Le sue radici (soluzioni di  $a^2-4a-4=0$ ) sono  $2-2\sqrt{2}$  e  $2+2\sqrt{2}$ . Dunque i valori di  $a$  per cui  $a^2-4a-4 \geq 0$  sono quelli per cui  $a \leq 2-2\sqrt{2}$  e  $a \geq 2+2\sqrt{2}$ ; poichè  $2-2\sqrt{2} < 0$ , i valori di  $a$  maggiori o uguali a zero e tali che  $a^2-4a-4 \geq 0$  (e quindi tali che l'equazione iniziale abbia almeno una soluzione reale) sono quelli per cui  $a \geq 2+2\sqrt{2}$  e il minimo di questi valori è  $a = 2+2\sqrt{2}$ .
- 6) La risposta è **(E)**. I triangoli  $DBG$  e  $CEF$  sono entrambi rettangoli isosceli e i loro cateti misurano  $\frac{1}{4}L$ ; quindi ciascuno di loro ha area  $\frac{1}{32}L^2$ . L'area del pentagono  $ADGFE$  è la differenza tra l'area di  $ABC$ , che vale  $\frac{1}{2}L^2$ , e la somma delle aree dei triangoli  $DBG$  e  $CEF$ ; quindi  $7 \text{ m}^2 = \frac{1}{2}L^2 - \frac{1}{16}L^2 = \frac{7}{16}L^2$ , da cui si ricava  $L = 4 \text{ m}$ .
- 7) La risposta è **(C)**. La prima cifra può essere uno qualunque tra i numeri 1, 2, 3, 4 e 5; dunque ci sono 5 scelte per la prima cifra. Per la seconda e la terza ci sono sei scelte: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Per la quarta cifra ci sono solo due scelte: 0 e 5; infatti affinché il numero sia divisibile per 5 la sua ultima cifra deve essere 0 oppure 5. Il numero complessivo di scelte di quattro numeri tra 1, 2, 3, 4 e 5 per comporre un numero di quattro cifre divisibile per 5 è dato dal prodotto delle scelte possibili per ciascuna delle cifre, cioè:  $5 \times 6 \times 6 \times 2 = 360$ .
- 8) La risposta è **(C)**. Se  $S$  indica la spesa sostenuta da Marco nel 2002, quella del 2003 è:  $2S - 2S \frac{30}{100} = \frac{7}{5}S$ . Analogamente, la spesa sostenuta nel 2004 è pari ai sette quinti di quella del 2003, cioè  $(\frac{7}{5})^2 S = \frac{49}{25}S$ . Poichè  $\frac{49}{25}$  è maggiore di 1 e minore di 2, la spesa del 2004 è maggiore di quella del 2002 ma minore del doppio di essa.

- 9) La risposta è **(C)**. Osserviamo che  $n^2 - 14n + 24 = (n - 12)(n - 2)$ , quindi, affinché questa espressione coincida con un numero primo  $p$  è necessario che si verifichi una delle due situazioni seguenti. *I caso:*  $n - 12$  e  $n - 2$  sono numeri positivi, di cui uno coincide con 1 e l'altro con  $p$ . *II caso:*  $n - 12$  e  $n - 2$  sono due numeri negativi di cui uno coincide con  $-1$  e l'altro con  $-p$ . Il primo caso porta a  $n - 12 = 1$  ( $n - 12$  è sicuramente minore di  $n - 2$  e dunque deve coincidere con 1),  $n = 13$ ,  $n - 2 = 11$ , numero primo; quindi abbiamo il valore accettabile  $n = 13$ . Il secondo caso porta a  $n - 2 = -1$ ,  $n = 1$ , e  $n - 12 = -11 = -p$  con  $p$  numero primo; quindi abbiamo un secondo valore accettabile  $n = 1$ . In tutto abbiamo due valori accettabili per  $n$ .
- 10) La risposta è **(A)**. Calcoliamo le dimensioni (altezza e dimensioni della base) interne della cassetta. L'altezza interna è pari a quella esterna meno 2 cm (perchè la cassetta non ha coperchio), ovvero 45 cm. Le dimensioni interne della base sono invece uguali a quelle esterne dimuite di 4 centimetri ciascuna, ovvero sono 34 cm e 40 cm. Il volume interno è allora  $(34 \times 40 \times 45) \text{ cm}^3$  cioè  $61200 \text{ cm}^3$ .
- 11) La risposta è **(B)**. Supponiamo che il primo dei quattro amici sia bugiardo; questo vuol dire che c'è esattamente un bugiardo (cioè il primo stesso), se infatti ce ne fossero almeno due, il primo avrebbe detto il vero, contraddicendo il fatto che è un bugiardo. D'altra parte il secondo dei quattro dà ragione al primo, e dunque è anche egli un bugiardo, questo ci porta ad una contraddizione. Quindi il primo non è un bugiardo. Il secondo, conseguentemente, non è neppure lui un bugiardo, ma allora i bugiardi sono al più due (il terzo e il quarto); d'altra parte i bugiardi devono essere almeno due, perchè questo è quanto viene detto dal primo, che non è un bugiardo. In conclusione, l'unica situazione possibile è: primo e secondo non bugiardi, terzo e quarto bugiardi; questa è compatibile con le affermazioni che vengono fatte e porta alla soluzione.
- 12) La risposta è **(B)**. Il primo cuscino (dal basso) ha sopra di sé un peso di  $\frac{19}{2}$  kg e dunque il suo spessore diminuisce di 19 cm, diventando 11 cm; allo stesso modo il secondo diminuisce di 18 cm e il suo spessore diventa 12 cm, il terzo diminuisce di 17 cm il suo spessore diventa 13 cm e così via fino all'ultimo cuscino il cui spessore rimane di 30 cm. Lo spessore della pila di cuscini è allora pari a  $(11 + 12 + 13 + \dots + 28 + 29 + 30) = 410$  cm.
- 13) La risposta è **(D)**. Indichiamo con  $A$ ,  $B$  e  $C$  i vertici del triangolo, in modo che  $A$  sia il vertice dell'angolo retto, il cateto  $AB$  misuri 21 cm e il cateto  $AC$  misuri 28 cm. Indichiamo inoltre con  $F$  il centro della circonferenza di cui la semicirconferenza fa parte ( $F$  appartiene all'ipotenusa  $BC$ ) e con  $D$  e  $E$  i punti in cui la semicirconferenza è tangente ai lati  $AB$  e  $AC$  rispettivamente. I triangoli  $CEF$  e  $FDB$  sono simili; se  $x$  indica la misura (in centimetri) del raggio della semicirconferenza, abbiamo allora  $\frac{28-x}{x} = \frac{x}{21-x}$ . Questa equazione ha una sola soluzione:  $x = 12$ . Dunque l'area della semicirconferenza è  $(\pi 12^2)/2 \text{ cm}^2 = 72\pi \text{ cm}^2$ .
- 14) La risposta è **(D)**. Osserviamo che  $a^2 - 4b^2 = (a - 2b)(a + 2b)$ . Poichè  $a$  e  $b$  sono positivi, lo è anche  $a + 2b$  e quindi lo deve essere anche  $a - 2b$ . I numeri  $a - 2b$  e  $a + 2b$  devono essere quindi due divisori positivi di 45, il cui prodotto è 45, e di cui il primo è minore del secondo. Le possibilità sono tre:  $a - 2b = 1$  e  $a + 2b = 45$ , questa porta a  $a = 23$ ,  $b = 11$ ;  $a - 2b = 3$  e  $a + 2b = 15$ , che porta a  $a = 9$ ,  $b = 3$ ;  $a - 2b = 5$  e  $a + 2b = 9$  che porta a  $a = 7$ ,  $b = 1$ . In tutti e tre i casi abbiamo coppie accettabili e quindi abbiamo tre soluzioni.
- 15) La risposta è **(C)**. Il primo dei 2004 giorni ci saranno tre amebe, di cui una scura, una chiara e una che ha la stessa probabilità, cioè  $\frac{1}{2}$ , di essere chiara o scura. Indichiamo il primo caso con  $CSC$  (chiara, scura, chiara) e il secondo con  $CSS$ . Il primo caso porta, il secondo giorno, alle tre possibilità  $CCSC$ ,  $CSSC$  e  $CSCC$  (ovvero in cui sia la prima, la seconda oppure la terza a dividersi); osserviamo che queste tre possibilità hanno la stessa probabilità di accadere,

cioè  $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ . Analogamente il secondo caso porta alle tre seguenti possibilità per il secondo giorno:  $CCSS$ ,  $CSSS$ ,  $SSSS$ , tutte aventi probabilità  $\frac{1}{6}$  di accadere. Quindi, il secondo giorno ci saranno, oltre a due amebe una chiara e una scura, due amebe per le quali i tre eventi: entrambe chiare, entrambe scure, una chiara e una scura, hanno la stessa probabilità di accadere, cioè  $\frac{1}{3}$ . In particolare, la probabilità che ci sia una sola ameba scura il secondo giorno è  $\frac{1}{3}$ . Questo ragionamento si può ripetere per i giorni successivi; in un generico giorno  $n$  ci saranno sicuramente una ameba chiara e una ameba scura, più  $n$  amebe; gli eventi che tra queste  $n$  ve ne siano esattamente  $k$  scure, al variare di  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , hanno tutti la stessa probabilità di accadere; poichè si tratta di  $n + 1$  eventi, questa probabilità è  $\frac{1}{n+1}$ . In particolare, anche la probabilità che vi sia una sola ameba scura il giorno  $n$  è  $\frac{1}{n+1}$ . Per  $n = 2004$  otteniamo la soluzione  $\frac{1}{2005}$ .

- 16) La risposta è (C). Affinchè  $x$  risolva l'equazione, dobbiamo essere in uno dei casi seguenti. Primo caso:  $x + 2 = 0$ ; secondo caso:  $x^2 - x - 1 = 1$ ; terzo caso  $x^2 - x - 1 = -1$  e  $x + 2$  multiplo di 2. Il primo caso ci porta a  $x = -2$ , che è una soluzione accettabile. Il secondo caso ci porta ai due valori  $x = 2$  e  $x = -1$ , soluzioni di  $x^2 - x - 1 = 1$ , entrambi accettabili. Nel terzo caso dobbiamo avere  $x^2 - x - 1 = -1$ , da cui  $x = 0$  oppure  $x = 1$ ; per il primo valore abbiamo  $x + 2 = 2$  (che è multiplo di 2) e si tratta in effetti di una soluzione accettabile; per il secondo valore invece  $x + 2 = 3$  e quindi  $x = 1$  non è una soluzione. Complessivamente abbiamo le quattro soluzioni:  $-2, -1, 0, 2$ .
- 17) La risposta è (C). Osserviamo che i triangoli  $DMP$  e  $CPB$  sono simili. Se  $h$  indica la misura dell'altezza di  $DMP$  rispetto alla base  $DM$  e  $k$  indica la misura dell'altezza di  $CPB$  rispetto alla base  $CB$ , deve essere (per la precedente similitudine):  $\frac{h}{k} = \frac{DM}{CB} = \frac{1}{2}$ . D'altra parte, la somma di  $h$  e  $k$  coincide con la misura del lato del quadrato:  $h + k = 1$ . Si trova allora  $h = \frac{1}{3}$  e l'area cercata è quindi  $\frac{h}{2}DM = \frac{1}{12}$ .
- 18) La risposta è (D). Osserviamo innanzitutto che se un numero  $n$  è parafilo, e  $m$  è un multiplo di  $n$ , allora anche  $m$  è parafilo, poichè i multipli di  $m$  sono anche multipli di  $n$  e quindi terminano con due cifre pari. Il numero 2740 è multiplo di 20 e 20 è parafilo, infatti ogni multiplo di 20 ha come ultima cifra 0 e come penultima cifra un multiplo di 2. Dunque 2740 è parafilo.
- 19) La risposta è (B). Le quattro affermazioni fatte sono le seguenti. I:  $a > b$ ; II:  $b > c$ ; III:  $c > a$ ; IV:  $2a = b + c$ . Se la I fosse falsa, dalla II e la III avremmo  $a < b$  e  $a < c$  quindi  $2a < b + c$  che contrasta la IV, quindi la I non può essere falsa. Se la III fosse falsa, avremmo analogamente dalla I e la II  $a > b$  e  $a > c$  da cui  $2a > b + c$  che contrasta la IV, quindi la III è vera. La IV non può essere falsa, perchè I e II sono in chiara contraddizione con III. Dunque la sola affermazione che può essere falsa è la II. D'altra parte le affermazioni I, III e IV non sono in contrasto tra loro (scelto comunque il numero  $a$ , se si pone  $b = a - 1$  e  $c = a + 1$  le tre affermazioni sono verificate). Dalla I e la III segue allora che  $b < a < c$ .
- 20) La risposta è (D). Dalla figura si deduce che la bisettrice dell'angolo  $\widehat{BCA}$  è la retta verticale passante per  $C$ , infatti i due lati  $CB$  e  $CA$  sono inclinati in modo simmetrico rispetto a tale retta; chiamiamo  $r$  questa retta. Analogamente, si osserva che la bisettrice dell'angolo  $\widehat{CAB}$  è la retta, passante per  $A$ , inclinata di  $45^\circ$  rispetto alla direzione orizzontale della griglia, che interseca la parte interna del triangolo; chiamiamo  $s$  questa retta. Il punto  $P$  in cui  $r$  e  $s$  si incontrano si trova allora spostandosi, a partire da  $A$ , di 5 unità orizzontalmente verso destra e di 5 unità verticalmente verso l'alto.  $P$  è il centro del cerchio inscritto nel triangolo  $ABC$ . Indichiamo con  $Q$  il punto che si trova partendo da  $P$  e spostandosi orizzontalmente di 2 unità verso destra e verticalmente di una unità verso l'alto;  $Q$  appartiene al lato  $BC$ . Il segmento  $PQ$  è ortogonale al

lato  $CB$  e dunque la sua misura è pari al lato del cerchio inscritto. D'altra parte, per il Teorema di Pitagora, la misura di  $PQ$  è  $\sqrt{1+2^2}u = \sqrt{5}u$ .

**21)** La risposta è **(C)**. I termini della successione possono essere scritti facilmente come potenze di 2; in questo modo infatti la potenza di ciascun termine (dal terzo in poi) è la somma delle potenze dei due termini precedenti. La successione è allora formata da:  $1 = 2^0$ ,  $2 = 2^1$ ,  $2 = 2^{0+1} = 2^1$ ,  $4 = 2^{1+1} = 2^2$ ,  $8 = 2^{2+1} = 2^3$ ,  $2^{3+2} = 2^5$ ,  $2^{5+3} = 2^8$ ,  $2^{8+5} = 2^{13}$ ,  $2^{13+8} = 2^{21}$ ,  $2^{21+13} = 2^{34}$ ,  $2^{34+21} = 2^{55}$ ,  $2^{55+34} = 2^{89}$ ,  $2^{89+55} = 2^{144}$ ; quest'ultimo è il tredicesimo termine.

**22)** La risposta è **(B)**. L'equazione di partenza è

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$$

Questa diventa, attraverso semplificazioni successive

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{x}{1+x}} = 1 + \frac{1}{\frac{1+2x}{1+x}} = 1 + \frac{1+x}{1+2x} = \frac{2+3x}{1+2x}$$

(si è supposto via via che:  $x \neq 0$ ,  $x \neq -1$ ,  $x \neq -\frac{1}{2}$ ). Quindi si arriva all'equazione  $x = (2+3x)/(1+2x)$ . Dopo alcuni ulteriori (e semplici) passaggi, si trova che  $x$  deve risolvere l'equazione di secondo grado:  $x^2 - x - 1 = 0$  che ha come soluzioni  $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  e  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Di queste, solo la seconda è positiva.

**23)** La risposta è **(D)**. La 2004-esima lettera è la quarta lettera della 501-esima parola, infatti  $2004 = 501 \times 4$ . Osserviamo che le quarte lettere delle parole (essendo anche le lettere finali) si ripetono a cicli di 21. Poichè  $501 = 21 \times 23 + 18$ , la quarta lettera della 501-esima parola coincide con la quarta lettera della 18-esima parola, cioè T.

**24)** La risposta è **(C)**. Siano  $\alpha, \beta, \gamma$  gli angoli del triangolo in  $A, B, C$  rispettivamente. Considerando il triangolo  $BIC$ , si ottiene  $\widehat{BIC} = 180^\circ - \frac{\beta+\gamma}{2}$ . Ma  $\widehat{BIC} = \widehat{EID}$  (sono opposti al vertice) e, poiché  $IDAE$  è iscrivibile in una circonferenza,  $\alpha$  è il supplementare di  $\widehat{EID}$ , ossia  $\alpha = \frac{\beta+\gamma}{2}$ . Sostituendo  $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$  si ottiene  $\alpha = 60^\circ$ .

**25)** La risposta è **(E)**. La probabilità di scegliere ciascuno dei due sacchetti è  $\frac{1}{2}$ . Se  $p_1$  è la probabilità di estrarre una mela marcia dal primo sacchetto, e  $p_2$  la probabilità di estrarre una mela marcia dal secondo sacchetto, la probabilità di estrarre una mela marcia vale complessivamente  $p = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2$ . Se tutte le mele marce si trovano in uno solo dei due sacchetti (per es. il primo), allora  $p_2 = 0$ , e la probabilità totale non può superare  $\frac{1}{2}$ . Invece, ponendo tre mele marce (e solo quelle) nel primo sacchetto, le altre sette nel secondo sacchetto, si ha  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = \frac{1}{7}$ , e conseguentemente  $p = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$ . Questa è l'unica disposizione con la quale  $p > \frac{1}{2}$ . Ciò può essere verificato considerando materialmente i diversi casi possibili (non sono tanti!), oppure come segue:

- con 3 mele, in un sacchetto ( $k$  delle quali marce) e 7 nell'altro si ha  $p_1 + p_2 = \frac{k}{3} + \frac{4-k}{7} = \frac{1}{21} \times (4k + 12)$ , massimo ( $= \frac{8}{7}$ ) per  $k = 3$ ;  $k$  può essere 0,1,2,3.
- con 4 mele, in un sacchetto ( $k$  delle quali marce) e 6 nell'altro si ha  $p_1 + p_2 = \frac{k}{4} + \frac{4-k}{6} = \frac{1}{12} \times (k+8)$ , massimo ( $=1$ ) per  $k = 4$ ;  $k$  può essere 0,1,2,3,4.
- con 5 mele, in un sacchetto ( $k$  delle quali marce) e 5 nell'altro si ha  $p_1 + p_2 = \frac{k}{5} + \frac{4-k}{5} = \frac{4}{5}$ ;  $k$  può essere 0,1,2,3,4.