

*I Giochi di Archimede - Gara Biennio*

23 novembre 2005

- 1) La prova consiste di 20 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
- 2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
- 3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
- 4) Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è un'ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.

Nome \_\_\_\_\_ Cognome \_\_\_\_\_ Classe \_\_\_\_\_

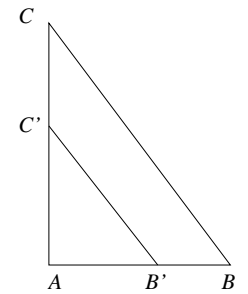
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	

- 1) Quante cifre ha il numero  $2^3 \cdot 5^4 \cdot 10^5$ ?  
(A) Sei, (B) sette, (C) otto, (D) nove, (E) nessuna delle precedenti.
- 2)  $\sqrt{12^{12}}$  è uguale a:  
(A)  $6^6$ , (B)  $12^{2\sqrt{3}}$ , (C)  $2^{12} 3^6$ , (D)  $6^{12}$ , (E) nessuno dei numeri precedenti.
- 3) Qual è il valore massimo che può assumere il numero  $a(b+c) - b(a+c)$  quando  $a$ ,  $b$  e  $c$  sono numeri interi distinti tra loro, maggiori o uguali a 1 e minori o uguali a 10?  
(A) 80, (B) 81, (C) 84 (D) 90, (E) 100.
- 4) La nonna Lucia ha portato un cestino con 120 ciliege ai suoi tre nipoti, Jacopo di 4 anni, Martino di 7 anni e Duccio di 9 anni. La nonna distribuisce tutte le ciliege ai nipoti secondo questo criterio: dà a ciascun nipote un numero di ciliege ottenuto moltiplicando l'età del nipote per un certo fattore, e questo fattore è lo stesso per tutti e tre i nipoti. Quante ciliege vengono date a Jacopo?  
(A) 20, (B) 21, (C) 22, (D) 23, (E) 24.
- 5) Un atollo ha la forma di una corona circolare delimitata da due circonferenze concentriche di raggi 1 km e 6 km rispettivamente. Giovanni e Marco sono i soli

abitanti dell'atollo; dopo un temporale che ha distrutto le loro capanne, essi decidono di ricostruirle il più lontano possibile l'una dall'altra, in modo però che esista un percorso rettilineo che le congiunge e che giace interamente sull'atollo. Quanto disteranno tra loro le capanne di Giovanni e Marco? (Supponete che le due circonferenze che delimitano l'atollo facciano parte di esso).

- (A)  $\frac{\sqrt{35}}{2}$  km, (B)  $\frac{\sqrt{37}}{2}$  km, (C)  $\sqrt{37}$  km, (D)  $2\sqrt{35}$  km, (E)  $2\sqrt{37}$  km.

- 6) Una stanza rettangolare ha le pareti rivolte nelle direzioni dei quattro punti cardinali e ci sono quattro porte d'accesso. Tre persone si trovano nella stanza e fanno le seguenti affermazioni. Prima persona: "Non ci sono porte sulla parete Sud". Seconda persona: "Ci sono porte solo sulla parete Nord". Terza persona: "Su ogni parete c'è al massimo una porta". Che cosa si può dire per certo delle affermazioni fatte?  
(A) L'affermazione fatta dalla prima persona è vera, (B) l'affermazione fatta dalla seconda persona è vera, (C) l'affermazione fatta dalla terza persona è vera, (D) almeno una affermazione è falsa, (E) non si può dire niente di certo sulle affermazioni fatte.
- 7) Alla fine di un campionato di calcio a 20 squadre (in cui ogni squadra gioca contro ogni altra squadra esattamente due partite) i Matematici hanno vinto 19 partite, ne hanno pareggiate 12 e ne hanno perse 7. L'allenatore osserva che si ha  $19=12+7$ . Per una generica squadra del campionato indichiamo con  $(v, n, p)$  la terna formata dal numero di vittorie, pareggi e sconfitte rispettivamente, ottenuti nel campionato. Per quante terne distinte può accadere che  $v = n + p$ ? (Attenzione: le terne sono ordinate, quindi, ad esempio,  $(19, 12, 7)$  e  $(19, 7, 12)$  sono da considerarsi distinte).  
(A) 19, (B) 20, (C) 38, (D) 40, (E) nessuna delle precedenti.
- 8) Il triangolo  $ABC$  è rettangolo ed i cateti  $AB$  e  $AC$  misurano 3 m e 4 m rispettivamente. Siano  $B'$  e  $C'$  punti appartenenti ai lati  $AB$  e  $AC$  rispettivamente, tali che la retta contenente il segmento  $B'C'$  sia parallela a quella contenente il segmento  $BC$  e distante 1 m da essa (vedi figura). Calcolare l'area del triangolo  $AB'C'$ .  
(A)  $\frac{49}{24}$  m<sup>2</sup>, (B) 2 m<sup>2</sup>, (C)  $\frac{65}{24}$  m<sup>2</sup>, (D)  $\frac{7}{2}$  m<sup>2</sup>,  
(E) nessuna delle precedenti.
- 9) Comunque si prenda un numero naturale  $n$ , il numero  $(n+2)(n+3)(2n+5)$  è divisibile per:  
(A) 4, (B) 6, (C) 9, (D) 10, (E) 15.
- 10) Per quante coppie ordinate  $(a, b)$  di numeri interi accade che il loro prodotto sia uguale alla loro somma?  
(A) Nessuna, (B) una, (C) due, (D) quattro, (E) più di quattro.



11) Fabio ritrova un vecchio lucchetto a combinazione; per aprire il lucchetto bisogna allineare nell'ordine giusto tre cifre, ciascuna delle quali può variare da 0 a 9. Fabio non ricorda la combinazione corretta, ma è sicuro che la somma delle tre cifre sia 10. Quanti tentativi dovrà fare, al massimo, per trovare la combinazione corretta?  
 (A) 61, (B) 63, (C) 65, (D) 67, (E) 69.

12) In un triangolo, per ogni coppia di lati consecutivi, i due assi dei lati e la bisettrice dell'angolo formato dai due lati si incontrano in uno stesso punto. Possiamo affermare che:

(A) non esiste un triangolo con questa proprietà, (B) il triangolo è equilatero, (C) il triangolo ha un angolo di  $30^\circ$ , (D) il triangolo è rettangolo, (E) il triangolo ha un angolo di  $45^\circ$ .

13) Quanti sono i numeri interi maggiori o uguali a 1 e minori o uguali a 100 che sono uguali al quadrato del numero dei propri divisori positivi? (Attenzione: tra i divisori di un numero vi sono anche 1 ed il numero stesso).

(A) 0, (B) 1, (C) 2, (D) 3, (E) 4.

14) Per ogni numero intero  $n$  compreso tra 10 e 99, estremi inclusi, si sommano il prodotto delle sue cifre e la somma delle sue cifre, ottenendo così un nuovo numero  $S(n)$ . Per quanti  $n$  accade che  $S(n) = n$ ?

(A) 8, (B) 9, (C) 10, (D) 11, (E) 12.

15) Due cerchi hanno raggi lunghi 1 m e 3 m rispettivamente. Sapendo che esistono due rette ortogonali tra loro, ciascuna tangente ad entrambi i cerchi, qual è il minimo valore possibile della distanza tra i due centri?

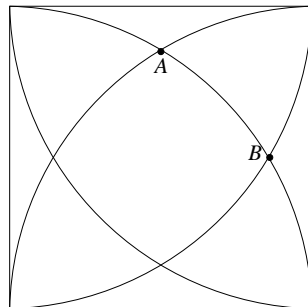
(A)  $\sqrt{2}$  m, (B)  $2\sqrt{2}$  m, (C)  $(\sqrt{2} + \sqrt{5})$  m, (D)  $2\sqrt{5}$  m, (E)  $4\sqrt{2}$  m.

16) Andrea non ha fatto gli esercizi per casa e per punizione la maestra gli assegna come compito quello di scrivere sul quaderno tutti i numeri compresi tra 1 e 2005, estremi inclusi (ogni numero deve essere scritto una sola volta). Quante cifre dovrà scrivere in tutto Andrea?

(A) 6900, (B) 6903, (C) 6910, (D) 6913, (E) 6923.

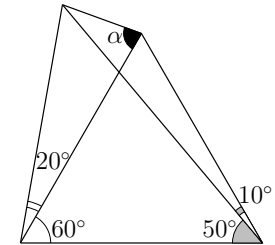
17) Nel quadrato in figura sono stati disegnati i quattro archi di circonferenza, ciascuno avente centro in uno dei vertici del quadrato e raggio pari al lato del quadrato, che misura 10 m. Quanto vale la distanza tra i punti  $A$  e  $B$ ?

(A)  $3(\sqrt{6} - 1)$  m, (B) 5 m, (C)  $5(\sqrt{6} - \sqrt{2})$  m, (D)  $8(\sqrt{3} - 1)$  m, (E) nessuna delle precedenti.



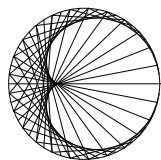
18) In un grande ufficio ci sono 84 impiegati, ciascuno dei quali conosce almeno una lingua tra l'inglese e il tedesco; inoltre, il 20% di coloro che parlano l'inglese parla anche il tedesco, e l'80% di coloro che parlano il tedesco parla anche l'inglese. Quanti sono gli impiegati di quell'ufficio che conoscono entrambe le lingue?  
 (A) 12, (B) 14, (C) 15, (D) 16, (E) 18.

19) Nella figura qui a fianco, quanto misura l'angolo  $\alpha$ ?  
 (A)  $70^\circ$ , (B)  $75^\circ$ , (C)  $80^\circ$ , (D)  $90^\circ$ , (E) non può essere determinato coi soli dati forniti.



20) In ciascuna delle seguenti catene di disuguaglianze compaiono gli stessi cinque numeri; quale di esse è completamente vera?

(A)  $2^{3^2} < 2^{3^3} < 3^{2^2} < 3^{2^3} < 3^{3^2}$ , (B)  $3^{2^2} < 3^{2^3} < 2^{3^2} < 2^{3^3} < 3^{3^2}$ ,  
 (C)  $3^{2^2} < 3^{2^3} < 2^{3^2} < 3^{3^2} < 2^{3^3}$ , (D)  $3^{2^2} < 2^{3^2} < 3^{2^3} < 2^{3^3} < 3^{3^2}$ ,  
 (E)  $3^{2^2} < 2^{3^2} < 3^{2^3} < 3^{3^2} < 2^{3^3}$ .



## *I Giochi di Archimede - Soluzioni Biennio*

23 novembre 2005

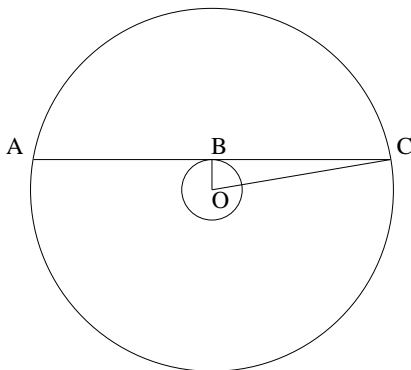
### 1 Griglia delle risposte corrette

Problema	Risposta corretta
1	D
2	C
3	B
4	E
5	D
6	D
7	B
8	A
9	B
10	C
11	B
12	B
13	C
14	B
15	B
16	D
17	C
18	D
19	C
20	E

### 2 Risoluzione dei problemi

- La risposta è **(D)**. Osserviamo che  $2^3 \cdot 5^4 \cdot 10^5 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 5 \cdot 10^5 = 10^3 \cdot 5 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^8$ . Dunque il numero che stiamo considerando è compreso tra  $10^8$  e  $10^9$ , estremi esclusi; quindi ha 9 cifre.
- La risposta è **(C)**.  $\sqrt{12^{12}} = 12^{\frac{12}{2}} = 12^6 = (2^2 \cdot 3)^6 = 2^{12} \cdot 3^6$ .
- La risposta è **(B)**.  $a(b+c) - b(a+c) = c(a-b)$ . Per rendere il più grande possibile questo numero scegliamo  $b$  più piccolo possibile, cioè  $b = 1$ . Per rendere massimo  $c(a-1)$  dobbiamo scegliere  $a$  e  $c$  più grandi possibili, compatibilmente con il fatto che devono essere minori o uguali a 10 e distinti. Per  $a = 10$  e  $c = 9$  si ottiene 81 mentre per  $a = 9$  e  $c = 10$  si ottiene 80. Quindi 81 è il valore massimo che possiamo ottenere.
- La risposta è **(E)**. Indichiamo con  $a$  il fattore per cui deve essere moltiplicata l'età di ciascun nipote per ottenere il numero di ciliege che gli spettano. Allora  $a(4+7+9) = 20a = 120$  e quindi  $a$  deve essere 6. Il numero di ciliege che spettano a Jacopo è  $6 \cdot 4 = 24$ .
- La risposta è **(D)**. La massima distanza possibile tra le due capanne, compatibilmente con il fatto che esista un percorso rettilineo interamente contenuto nell'atollo che le unisce, è la

lunghezza di una corda della circonferenza che delimita esternamente l'atollo, tangente alla circonferenza che lo delimita internamente. Una corda di questo tipo è il segmento  $AC$  nella figura riportata sotto. La lunghezza di  $AC$  è il doppio della lunghezza di  $BC$ ; questa può essere trovata applicando il Teorema di Pitagora al triangolo  $BOC$ :  $\overline{BC}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{OB}^2 = 35$  km. Dunque  $\overline{AC} = 2\sqrt{35}$  km.



6. La risposta è **(D)**. Le affermazioni della seconda persona e della terza persona sono in contraddizione tra loro e dunque una delle due deve essere falsa; quindi c'è almeno un'affermazione falsa. Osserviamo anche che i dati del problema non implicano che nessuna delle affermazioni fatte sia necessariamente vera, quindi le risposte **(A)**, **(B)** e **(C)** non sono corrette.
7. La risposta è **(B)**. Ogni squadra gioca 38 partite, quindi  $v + n + p = 38$ . Se  $v = n + p$  allora  $v = 19$  e anche  $n + p = 19$ . Le terne per cui  $v = n + p$  sono allora:

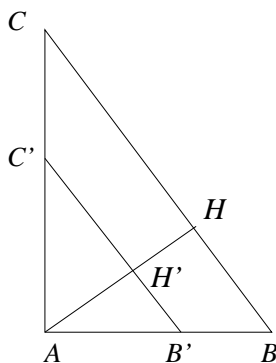
$$(19, 19, 0), (19, 18, 1), (19, 17, 2), \dots, (19, 1, 18), (19, 0, 19).$$

In tutto sono 20 terne ordinate distinte.

8. La risposta è **(A)**. Per il Teorema di Pitagora, l'ipotenusa  $BC$  misura 5 m. Sia  $AH$  l'altezza di  $ABC$  relativa all'ipotenusa  $BC$ . Uguagliando le formule per calcolare l'area di  $ABC$ :

$$\text{area}(ABC) = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 6 \text{ m}^2,$$

possiamo calcolare  $AH$  che misura allora  $(6 \cdot 2)/5$  m =  $12/5$  m. Il triangolo  $AB'C'$  è simile al triangolo  $ABC$ ; inoltre, poichè le due rette che contengono  $BC$  e  $B'C'$  sono parallele e hanno distanza 1, l'altezza  $AH'$  di  $AB'C'$  relativa all'ipotenusa  $B'C'$  è  $\left(\frac{12}{5} - 1\right)$  m =  $\frac{7}{5}$  m.

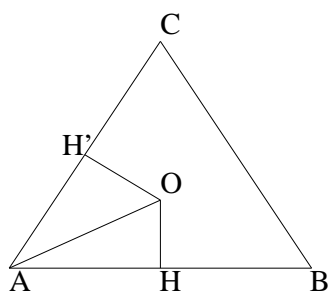


Quindi  $\frac{\overline{AH}}{\overline{AH'}} = \frac{12/5}{7/5} = \frac{12}{7}$ . Il rapporto tra le ipotenuse dei due triangoli ha lo stesso valore, quindi  $\frac{\overline{B'C'}}{12} = \frac{7}{12} \overline{BC} = \frac{35}{12}$  m. L'area di  $AB'C'$  è data da

$$\frac{\overline{B'C'} \cdot \overline{AH'}}{2} = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{35}{12}\right) \left(\frac{7}{5}\right) \text{ m}^2 = \frac{49}{24} \text{ m}^2.$$

9. La risposta è **(B)**. Sia  $n$  un qualsiasi numero naturale e sia  $N = (n+2)(n+3)(2n+5)$ .  $N$  è divisibile per due numeri consecutivi:  $n+2$  e  $n+3$ , quindi è certamente divisibile per un numero pari e quindi è divisibile per 2. Proviamo ora che  $N$  è anche divisibile per 3 e quindi è divisibile per 6. Se  $n$  è divisibile per 3, lo è anche  $n+3$  e quindi lo è  $N$ . Se  $n$  diviso 3 dà resto 1, allora  $n+2$  è divisibile per 3 e quindi  $N$  è divisibile per 3. Se infine  $n$  diviso 3 dà resto 2 allora  $n$  si può scrivere nella forma  $n = 3k+2$  per un certo numero naturale  $k$ . Quindi  $2n+5 = 6k+4+5 = 3(2k+3)$  è divisibile per 3 e quindi lo è anche  $N$ . Osserviamo anche che le risposte **(A)**, **(C)**, **(D)** ed **(E)** non sono corrette: infatti se  $n = 1$ ,  $N = 84$  che non è divisibile né per 9, né per 10 né per 15; se  $n = 3$ ,  $N = 330$  che non è divisibile per 4.
10. La risposta è **(C)**. Prima soluzione. L'uguaglianza  $a+b = ab$  equivale a  $(a-1)(b-1) = 1$  quindi i fattori  $a-1$  e  $b-1$  devono coincidere entrambi con 1 oppure coincidere entrambi con -1. Il primo caso porta alla coppia  $(a=2, b=2)$ ; il secondo porta alla coppia  $(a=0, b=0)$ . Le coppie che verificano la proprietà richiesta sono in tutto due.  
Seconda soluzione. Deve essere  $ab = a+b$ ; osserviamo che la coppia  $(0,0)$  verifica questa uguaglianza. Inoltre se  $a=0$  allora  $0=0+b$  e dunque anche  $b=0$ ; allo stesso modo si vede che se  $b=0$  allora  $a=0$ . Quindi se vogliamo cercare altre soluzioni oltre  $(0,0)$  possiamo supporre che  $a$  e  $b$  siano entrambi diversi da zero. Allora  $b = 1 + \frac{b}{a}$  quindi  $a$  divide  $b$ ; allo stesso modo  $a = \frac{a}{b} + 1$  e quindi  $b$  divide  $a$ . L'unica possibilità è allora che  $a = \pm b$ . Se  $a = b$  allora  $a^2 = 2a$  cioè  $a = 2$  e otteniamo così una seconda soluzione data da  $(2,2)$ . Se  $a = -b$  allora  $-a^2 = 0$  cioè  $a = 0$ , ma questo ci riporta alla soluzione  $(0,0)$  già trovata. In conclusione le coppie che verificano la proprietà richiesta sono due:  $(0,0)$  e  $(2,2)$ .
11. La risposta è **(B)**. Indichiamo con  $X, Y, Z$  la prima, la seconda e la terza cifra del lucchetto. Per risolvere il problema si devono contare tutte le possibili terne ordinate  $(X, Y, Z)$  tali che  $X+Y+Z = 10$ . Se  $X = 0$  deve essere  $Y+Z = 10$ ; in questo caso né  $Y$  né  $Z$  possono essere 0,  $Y$  può assumere tutti i valori compresi tra 1 e 9, estremi inclusi, e per ciascuna scelta di  $Y$  il valore di  $Z$  è determinato:  $Z = 10 - Y$ ; ci sono quindi 9 terne con  $X = 0$ . Se  $X = 1$ , allora  $Y+Z = 9$ ,  $Y$  può assumere tutti i valori compresi tra 0 e 9, estremi inclusi, e  $Z$  è conseguentemente determinata; ci sono allora 10 terne con  $X = 1$ . Si può procedere in questo modo trovando che ci sono 9 terne con  $X = 2$ , 8 con  $X = 3$ , e così via fino a 2 terne con  $X = 9$ . Il numero complessivo delle terne è allora  $9 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 63$ .
12. La risposta è **(B)**. Facendo riferimento alla figura, consideriamo i due lati consecutivi  $CA$  e  $AB$ . I segmenti  $HO$  e  $H'O$  appartengono agli assi di  $AB$  e  $CA$  rispettivamente,  $O$  è il punto di incontro di questi assi con la bisettrice di  $\widehat{CAB}$ . I triangoli  $AHO$  e  $AH'O$  hanno entrambi un angolo retto e hanno un angolo uguale:  $\widehat{H'AO} = \widehat{HAO}$ , quindi hanno tutti gli angoli uguali; inoltre hanno il lato  $AO$  in comune e dunque si tratta di triangoli congruenti. Conseguentemente,  $AH$  e  $AH'$  hanno la stessa lunghezza; quindi anche  $AB$  e  $CA$  hanno la stessa lunghezza, poichè  $H$  e  $H'$  sono i punti medi di  $AB$  e  $CA$  rispettivamente (gli assi incontrano i lati nei punti medi). Questo ragionamento può essere ripetuto per i lati  $AB$  e  $BC$

che quindi sono uguali. In conclusione i lati del triangolo  $ABC$  sono tutti uguali tra loro e quindi il triangolo è equilatero.



13. La risposta è **(C)**. Se  $N$  è un numero con la proprietà richiesta,  $N$  deve essere un quadrato perfetto compreso tra 1 e 100, estremi inclusi, quindi le possibilità per  $N$  sono:

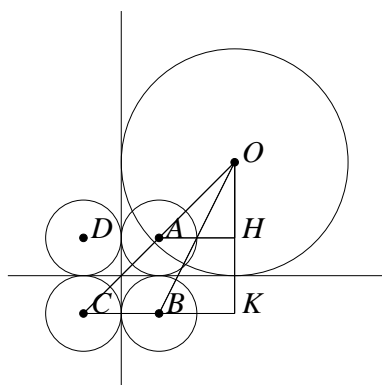
$$N = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.$$

Abbiamo:

- $N = 1$ , divisori :  $\{1\}$ , numero di divisori: 1,  $1 = 1^2$
- $N = 4$ , divisori :  $\{1, 2, 4\}$ , numero di divisori: 3,  $4 \neq 3^2$
- $N = 9$ , divisori :  $\{1, 3, 9\}$ , numero di divisori: 3,  $9 = 3^2$
- $N = 16$ , divisori :  $\{1, 2, 4, 8, 16\}$ , numero di divisori: 5,  $16 \neq 5^2$
- $N = 25$ , divisori :  $\{1, 5, 25\}$ , numero di divisori: 3,  $25 \neq 3^2$
- $N = 36$ , divisori :  $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ , numero di divisori: 9,  $36 \neq 9^2$
- $N = 49$ , divisori :  $\{1, 7, 49\}$ , numero di divisori: 3,  $49 \neq 3^2$
- $N = 64$ , divisori :  $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ , numero di divisori: 7,  $64 \neq 7^2$
- $N = 81$ , divisori :  $\{1, 3, 9, 27, 81\}$ , numero di divisori: 4,  $81 \neq 4^2$
- $N = 100$ , divisori :  $\{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$ , numero di divisori: 9,  $100 \neq 9^2$ .

Solo i due valori  $N = 1$  e  $N = 9$  hanno la proprietà richiesta.

14. La risposta è **(B)**. Se  $n$  è un numero intero compreso tra 10 e 99, estremi inclusi,  $n$  si può scrivere nella forma:  $n = 10a + b$ , dove  $a$  è la cifra delle decine di  $n$  e può variare da 1 a 9 e  $b$  è la cifra delle unità e può variare da 0 a 9.  $n$  ha la proprietà richiesta dall'esercizio se  $10a + b = ab + (a + b)$  cioè se  $9a - ab = a(9 - b) = 0$ . Poichè  $a \neq 0$  questo vuol dire  $b - 9 = 0$ , cioè  $b = 9$ . I numeri che hanno la proprietà richiesta sono allora quelli che hanno 9 come cifra delle decine e sono compresi tra 10 e 99, cioè: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99; sono in tutto 9.
15. La risposta è **(B)**. Tracciamo le due rette tangenti ai due cerchi e il cerchio di raggio 3 m posizionato come in figura, con centro in  $O$ .



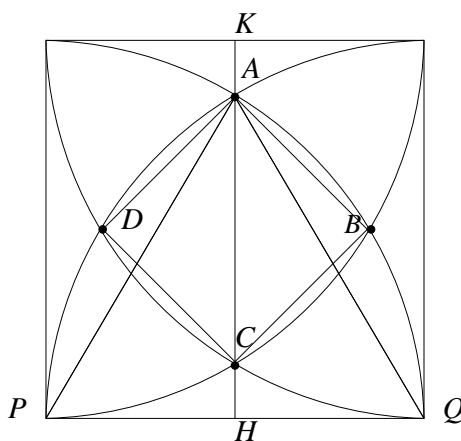
Le possibili posizioni del centro del cerchio di raggio 1 m sono i punti  $A, B, C, D$ . Tra i segmenti  $OA, OB, OC$  e  $OD$ , il segmento  $AO$  ha lunghezza minima; infatti chiaramente  $OC$  ha lunghezza maggiore di  $OA$ ; ma anche  $OB$  (e  $OD$  che è lungo come  $OB$ ) ha lunghezza maggiore di  $OA$  in quanto  $OA$  e  $OB$  sono le ipotenuse dei due triangoli rettangoli  $AHO$  e  $BKO$  che hanno i due cateti  $AH$  e  $BK$  di lunghezza uguale mentre il cateto  $OH$  ha lunghezza minore del cateto  $OK$ . Quindi la minima distanza tra i centri dei due cerchi è pari alla lunghezza di  $OA$ ; questa può essere calcolata applicando il Teorema di Pitagora al triangolo  $AHO$ :  $\overline{AO} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HO}^2} = \sqrt{4 + 4} \text{ m} = 2\sqrt{2} \text{ m}$ .

16. La risposta è **(D)**. Tra 1 e 2005 (estremi inclusi) ci sono:

$$\begin{aligned} \{1, \dots, 9\} &: 9 \text{ numeri con una cifra} \rightarrow 9 \times 1 = 9 \text{ cifre,} \\ \{10, \dots, 99\} &: 90 \text{ numeri con due cifre} \rightarrow 90 \times 2 = 180 \text{ cifre,} \\ \{100, \dots, 999\} &: 900 \text{ numeri con tre cifre} \rightarrow 900 \times 2 = 2700 \text{ cifre,} \\ \{1000, \dots, 2005\} &: 1006 \text{ numeri con quattro cifre} \rightarrow 1006 \times 4 = 4024 \text{ cifre.} \end{aligned}$$

Il numero totale di cifre è allora:  $9 + 180 + 2700 + 4024 = 6913$ .

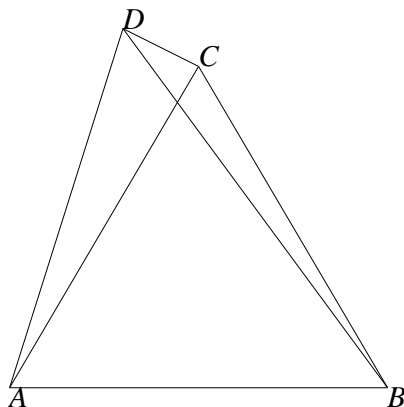
17. La risposta è **(C)**. Con riferimento alla figura, osserviamo che il triangolo  $APQ$  è equilatero e ha lato di lunghezza 10 m. Possiamo allora calcolare la sua altezza  $AH$ :  $\overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}10 \text{ m} = 5\sqrt{3} \text{ m}$ , e  $\overline{AK} = \overline{CH} = \overline{KH} - \overline{AH} = (10 - 5\sqrt{3}) \text{ m}$ . Allora abbiamo anche:  $\overline{AC} = \overline{AH} - \overline{CH} = (5\sqrt{3} - (10 - 5\sqrt{3})) \text{ m} = 10(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$ . Il quadrilatero  $ABCD$  è un quadrato, ha infatti tutti i lati di uguale lunghezza e le diagonali di uguale lunghezza, per le proprietà di simmetria della figura. La lunghezza del suo lato  $AB$  è pari alla lunghezza della sua diagonale  $AC$  divisa per  $\sqrt{2}$ , cioè:  $\overline{AB} = \frac{10(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}} \text{ m} = 5(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \text{ m}$ .



18. La risposta è **(D)**. Indichiamo con  $I$  il numero di impiegati che parlano inglese, con  $T$  il numero di impiegati che parlano tedesco e con  $B$  il numero di impiegati che parlano entrambe le lingue. I dati del problema ci dicono che il 20% di  $I$ , cioè  $\frac{1}{5}I$ , è uguale a  $B$  e anche l'80% di  $T$ , cioè  $\frac{4}{5}T$ , è uguale a  $B$ ; quindi  $\frac{1}{5}I = \frac{4}{5}T$  cioè  $I = 4T$ . Il numero totale di impiegati, che è 84, è la somma del numero di impiegati che parlano inglese e del numero di impiegati che parlano tedesco meno il numero di impiegati che parlano entrambe le lingue (che altrimenti verrebbero

contati due volte):  $84 = I + T - B = I + T - \frac{4}{5}T = I + \frac{1}{5}T = 4T + \frac{1}{5}T = \frac{21}{5}T$ . Quindi  $T = 84 \frac{5}{21} = 20$  e  $B = \frac{4}{5}T = 16$ .

19. La risposta è **(C)**. Facendo riferimento alla figura, il triangolo  $ABC$  è equilatero, poichè gli angoli in  $A$  e in  $B$  sono di  $60^\circ$ . Inoltre  $\widehat{ADB} = 180^\circ - (\widehat{DAB} + \widehat{DBA}) = 180^\circ - 80^\circ - 50^\circ = 50^\circ = \widehat{DBA}$ . Dunque il triangolo  $ABD$  è isoscele e quindi  $\overline{DA} = \overline{AB} = \overline{AC}$  cioè anche il triangolo  $ACD$  è isoscele. Allora  $\alpha = \widehat{ACD} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{CAD}) = \frac{1}{2}(180^\circ - 20^\circ) = 80^\circ$ .



20. La risposta è **(E)**. Prima soluzione.  $2^{3^3} = 2^{27} > 2^{18} = 4^9 > 3^9 = 3^{3^2} > 3^8 = 3^{2^3} = (3^2)^4 = 9^4 > 8^4 = (2^3)^4 = 2^{12} > 2^9 = 2^{3^2} = 4^4 > 3^4 = 3^{2^2}$ .

Seconda soluzione. I numeri presenti nelle varie catene di disuguaglianze sono (riportiamo solo i risultati di calcoli che possono essere fatti senza la calcolatrice in tempi ragionevoli):

$$\begin{aligned} 3^{2^2} &= 3^4 = 81, \\ 2^{3^2} &= 2^9 = 512, \\ 3^{2^3} &= 3^8 = (81)^2 = 7371, \\ 3^{3^2} &= 3^9 = 3^8 \cdot 3 = 7371 \cdot 3 = 22113, \\ 2^{3^3} &= 2^{27} = 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^7 = (1024)^2 \cdot 2^7 > (10^3)^2 = 10^6 > 22113. \end{aligned}$$

Dunque la catena di disuguaglianze giusta è la **(E)**:  $3^{2^2} < 2^{3^2} < 3^{2^3} < 3^{3^2} < 2^{3^3}$ .

Osserviamo infine che la **(A)**, la **(B)** e la **(D)** non sono corrette perchè il numero  $2^{3^3}$  non compare come ultimo termine a destra. La **(C)** non è corretta perchè contiene la disuguaglianza  $3^{2^3} = 7371 < 2^{3^2} = 512$  che è falsa.