Gara nazionale 1989

1. Dire se l'equazione $x^2 + xy + y^2$ ammette soluzioni (x, y) con x e y entrambi razionali.

2. In una tavola circolare ci sono 60 posti occupati da 30 uomini e dalle 30 rispettive mogli. Mostrare che esistono almeno due signore che siedono alla stessa distanza dai rispettivi mariti.

3. Dimostrare che, dato un tetraedro $ABCD$, esiste, ed è unico, un punto P interno ad esso tale che i 4 tetraedri aventi come base rispettivamente le 4 facce del tetraedro e come vertice il punto P hanno lo stesso volume.

4. Su una circonferenza consideriamo cinque punti che chiamiamo, ordinatamente, A, M, B, C, D, e sia M equidistante da A e da B. Siano inoltre E ed F rispettivamente le intersezioni di MD con AC e di MC con BD. Si dimostri che il quadrilatero $CDEF$ è inscrivibile in una circonferenza.

5. Se esce "testa" ottengo un gettone, se esce "croce" ne ottengo due. Vincerò il gioco se arriverò (non importa dopo quanti lanci) a possedere esattamente 100 gettoni. Dire se la probabilità di vincere è maggiore, uguale o minore di 2/3.

6. Sia α un numero reale ed f la funzione così definita:

$$\begin{cases} f(m,n) = \alpha f(m, n-1) + (1-\alpha) f(m-1, n-1) & \text{se } m \text{ e } n \text{ sono interi positivi} \\ f(0,0) = 1 & \\ f(m,0) = f(0,m) = 0 & \text{per ogni } m \text{ intero positivo} \end{cases}$$

Trovare i valori di α in corrispondenza dei quali si abbia $|f(m,n)| \leq 1989$ per ogni m ed n.