Gara nazionale 1990

1. Si consideri un cubo di dimensioni $3 \times 3 \times 3$ formato quindi da 27 cubetti unitari. Si domanda quante sono le rette dello spazio che passano per esattamente 3 centri di questi 27 cubetti, e quante sono quelle che passano esattamente per 2 di tali centri.

2. Dato il triangolo ABC si considerino il punto P di intersezione della bisettrice dell'angolo in B con il lato AC e il punto Q di intersezione della bisettrice dell'angolo in A con il lato BC. Supponendo che la circonferenza per P, Q, C passi anche per l'incentro R di ABC e posto $PQ = l$, determinare la lunghezza degli altri lati del triangolo PRQ.

3. Siano a, b, c tre numeri reali distinti e sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti reali. Sapendo che:

(i) $P(x)$ diviso per $(x - a)$ dà resto a;

(ii) $P(x)$ diviso per $(x - b)$ dà resto b;

(iii) $P(x)$ diviso per $(x - c)$ dà resto c,

determinare il polinomio che si ottiene come resto della divisione di $P(x)$ per $(x - a)(x - b)(x - c)$.

4. Siano a, b, c le misure dei lati di un triangolo. Sapendo che $a+b+c = 1$, dimostrare che $a^2 + b^2 + c^2 + 4abc \leq 1/2$.

5. Dimostrare che, per ogni intero x, il numero $x^2+5x+16$ non è divisibile per 169.

6. Alcune palline sono distribuite in $2n + 1$ sacchetti. Supponiamo che, tolto un qualunque sacchetto, sia possibile suddividere i rimanenti in due gruppi di n sacchetti, in modo che ciascun gruppo contenga lo stesso numero complessivo di palline. Dimostrare che i sacchetti contengono tutti lo stesso numero di palline.