Gara nazionale 1991

1. Sia Γ una circonferenza fissata e sia ABC un triangolo in essa inscritto. Se A', B', C' sono le intersezioni delle bisettrici uscenti rispettivamente da A, B, C con Γ, si consideri il triangolo $A'B'C'$.

a) I triangoli $A'B'C'$ così ottenuti al variare di ABC sono tutti i possibili triangoli inscritti in Γ? In caso contrario, quali limitazioni debbono soddisfare?

b) Dimostrare che le bisettrici di ABC coincidono con le altezze di $A'B'C'$.

2. Dimostrare che nessun numero della forma $a^3 + 3a^2 + a$, con a numero intero positivo, è un quadrato perfetto.

3. Consideriamo le somme del tipo $\pm 1 \pm 4 \pm 9 \pm 16 \cdots \pm n^2$. Dimostrare che ogni numero intero positivo si può rappresentare, per una opportuna scelta dei segni e di n, nel modo precedente. (Per esempio: $3 = -1 + 4$; $8 = +1 - 4 - 9 + 16 + 25 - 36 - 49 + 64$.)

4. Si consideri una scacchiera 8×8 con le caselle colorate di due differenti colori, bianco e nero, non come nella usuale scacchiera, ma rispettando comunque la seguente condizione: ogni colonna, così come ogni riga, della scacchiera contiene quattro caselle bianche e quattro caselle nere. Dimostrare che il numero di coppie di caselle contigue bianche è uguale al numero di coppie di caselle contigue nere. (Due caselle si dicono contigue se hanno un lato in comune.)

5. Per quali valori di n esiste un poliedro convesso avente n spigoli?

6. Ogni numero positivo x ha due “figli”: i numeri $x+1$ e $\dfrac{x}{x+1}$. Quali sono i discendenti del numero 1?