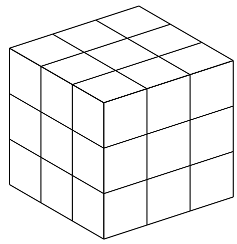
Gara nazionale 1992

1. Diremo che una retta interseca propriamente un cubo se passa per un punto interno al cubo. Dato un cubo suddiviso in 27 cubetti uguali come in figura, si dica qual è il numero massimo di cubetti che una retta può intersecare propriamente.



2. Sia dato un quadrilatero convesso di area 1. Si dimostri che si possono trovare 4 punti, sui lati o all'interno di esso, in modo che i triangoli aventi per vertici 3 di questi 4 punti abbiano tutti area maggiore o uguale a 1/4.

3. Per ogni numero naturale n sia $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ il prodotto di tutti i numeri interi da 1 a n. Si dimostri che per ogni $n \geq 3$ esistono n interi positivi distinti $d_1, d_2, \ldots, d_n$, divisori di $n!$, tali che: $n! = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$.

4. Una giuria formata da 9 persone deve esprimere un verdetto di colpevolezza o innocenza. Supponendo che non siano ammesse astensioni e che ciascun giurato voti indipendentemente e con probabilità 1/2 per ciascuna delle due decisioni, si dica qual è la probabilità che al termine della votazione un determinato giurato faccia parte della maggioranza.

Nel caso di una giuria composta da n persone, si dica per quali valori di n la probabilità di far parte della maggioranza è maggiore di 1/2, uguale a 1/2, minore di 1/2. (Nel caso in cui $n = 2k$ sia pari, si intende che un giurato appartiene alla maggioranza se la sua posizione ha ottenuto almeno $k + 1$ voti.)

5. Siano a, b, c numeri reali. Si dimostri che il minimo fra i numeri $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(c-a)^2$ è minore o uguale a

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

6. Siano a, b numeri interi. Si dimostri che, se $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ è un numero razionale non nullo, allora a e b sono entrambi cubi perfetti.