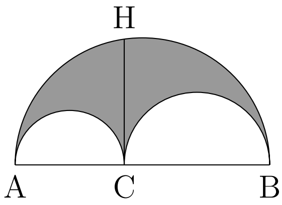
Gara nazionale 1993

1. Calcolare l'area della regione colorata delimitata dai tre semicerchi di diametri AB, BC, AC sapendo che il segmento CH è lungo $\sqrt{3}$, dove H è il punto del semicerchio di diametro AB la cui proiezione ortogonale sul diametro è C.



2. Trovare tutte le coppie p, q di primi (positivi) tali che $5x^2 - px + q$ abbia soluzioni razionali distinte.

3. È data una "scacchiera infinita", le cui righe e le cui colonne sono numerate con i numeri positivi. In ogni casella della scacchiera si può collocare al più un gettone (si hanno a disposizione infiniti gettoni).

Sono date due successioni $a_1, a_2, \ldots$ e $b_1, b_2, \ldots$ di numeri interi positivi. Dimostrare che si possono disporre i gestoni sulla scacchiera in modo che vi siano a_1 gettoni sulla prima riga, a_2 gettoni sulla seconda riga, $\ldots$, b_1 gettoni sulla prima colonna, b_2 gettoni sulla seconda colonna, $\ldots$

4. Sia ABC un triangolo e P un punto del piano. Chiamiamo P_A, P_B, P_C le proiezioni di P rispettivamente sui tre assi del triangolo. Si dimostri che il triangolo $P_AP_BP_C$ è simile al triangolo ABC. (Si consideri per semplicità solo il caso in cui il punto P giace nell'angolo $\widehat{M_AHM_B}$, essendo M_A, M_B, i punti medi dei lati BC e AC e H il punto di intersezione degli assi.)

5. Siano a, b e c tre numeri reali, positivi e inferiori a 1. Si dimostri che vale la seguente diseguaglianza:

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a + 1.$$

6. Sia C un cubo di lato 1 e lo si ruoti di 60° intorno ad una sua diagonale ottenendo così un cubo C'. Si determini il volume del solido di intersezione di C e C'.