

CESENATICO - FAKE EDITION - V. 1

1. Quante tabelle 4×4 distinte si possono realizzare, di modo che contengano solo $1, -1$ e la somma di ogni riga e ogni colonna sia 0 ?
2. In un triangolo rettangolo con i cateti di lunghezza intera, il raggio del cerchio inscritto è 5 . Quali sono le possibili lunghezze dei cateti?
3. Sia ABC un triangolo acutangolo con circocentro O e sia Γ la circonferenza per O, A, B ; siano P, Q le ulteriori intersezioni di CA e CB con Γ . Dimostrare che $CO \perp PQ$.
4. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi, con n radici intere distinte. Si dimostri che esiste almeno un polinomio $h(x)$ a coefficienti interi tale che $h(x)$ sia fattore di $q(x) = p(x)^2 + 1$, abbia grado almeno $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ e non sia divisibile per alcun polinomio a coefficienti interi di grado minore.
5. Trovare le terne di naturali (n, k, y) tali che $3^k - 1 = y^n$.