

## CESENATICO - FAKE EDITION - V. 3

1. Trovare il più grande intero  $N \leq 1000$  che abbia esattamente 20 divisori, inclusi 1 e  $N$  stesso.
2. Determinare per quali valori naturali di  $n$  il numero  $n^{2006} + n + 1$  è primo.
3. Sia  $a$  un numero reale positivo; mostrare che il polinomio  $p(x) = a^3x^3 + a^2x^2 + ax + a$  ha una radice intera se e solo se  $a = 1$ .
4. Abelardo e Brunilla fanno il seguente gioco: su una griglia  $n \times n$  posizionano in una casella d'angolo una pedina e a turno la muovono, potendola spostare solo dalla casella su cui si trova in una adiacente che non sia già stata visitata. Abelardo muove per primo; perde chi non può più muovere. Dire se esiste una strategia vincente per uno dei due giocatori.
5. Dato un quadrato, si traccino 4 circonferenze di centro nei suoi vertici, la somma delle cui aree non superi l'area del quadrato. Si scelgano poi 4 punti, ognuno interno ad una circonferenza, di modo che non ve ne siano due interni alla stessa. Mostrare che il quadrilatero che ha per vertici questi 4 punti è convesso.