Quinto Stage Olimpico di Parma – 2007

Gara a premi

Problemi da 2 punti

(Riservati ai non medaglie d'oro)

Problema 1 (Nazionali Irlanda 1998)**.** Sia $\{x_n\}_n$ una successione tale che x_0, x_1 sono numeri reali positivi e

$$x_{n+2} = \frac{1 + x_{n+1}}{x_n} \quad \text{per ogni } n \geq 0 \,.$$

Trovare x_{2007}.

Problema 2 (Nazionali Svizzera 1998)**.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione non costante che per ogni $x \in \mathbb{R}$ soddisfi

- $|f(x)| \leq 2007$;
- $f(x + \frac{13}{42}) + f(x) = f(x + \frac{1}{6}) + f(x + \frac{1}{7})$.

Dimostrare che f è periodica.

Problema 3 (Nazionali Irlanda 1994)**.** Sia B un punto qualsiasi interno ad un segmento AC. Si traccino i triangoli equilateri di lati AB, BC (da un lato della retta AC) ed AC (dall'altro lato). Dimostrare che i loro tre centri formano un triangolo equilatero con centro su AC.

Problema 4 (Sam 1)**.** Sia data una circonferenza di diametro AB e sia fissata una lunghezza $d < AB$. Sia ST una corda di lunghezza d e siano P la proiezione di S su AB, M il punto medio di ST. Mostrare che, al variare di ST tra le corde di lunghezza d, l'angolo $\widehat{SPM}$ rimane costante.

Problema 5 (Nazionali Svizzera 1999)**.** Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ che soddisfino

$$\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x \qquad \text{per ogni } x \neq 0 \,.$$

Problema 6 (Nazionali Giappone 1992)**.** Siano x, y interi positivi coprimi con $xy > 1$, e sia n un intero positivo pari. Dimostrare che $x^n + y^n$ non è divisibile per $x + y$.

Problema 7 (Sam 2)**.** Sono dati nel piano alcuni cerchi i cui diametri sommano a 41 ed esiste un cerchio di diametro 10 che li contiene tutti. Dimostrare che esiste una retta che interseca più di 4 cerchi.

Problema 8 (Nazionali Irlanda 1998)**.** Mostrare che nessun intero della forma $\overline{xyxy}$ (scritto in base 10) può essere un cubo perfetto. Trovare la più piccola base $b > 1$ per cui esiste un cubo perfetto della forma $\overline{xyxy}$ (scritto in base b).

Problema 9 (Nazionali Irlanda 1994)**.** Si consideri la successione di numeri reali definita da $x_1 = 2$ e $nx_n = 2(2n-1)x_{n-1}$ per $n \geq 2$. Dimostrare che tutti i termini della successione sono interi.

Problema 10 (Davide 5)**.** Siano $x_1, \ldots, x_n$ ($n \geq 2$) numeri reali positivi e definiamo $S = x_1 + \cdots + x_n$. Dimostrare che

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \leq 1 + S + \frac{S^2}{2!} + \frac{S^3}{3!} + \cdots + \frac{S^n}{n!}\,.$$

Problema 11 (Sam 6)**.** Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso; determinare i punti P che minimizzano

$$PA + PB + PC + PD$$

Problema 12 (Nazionali Svizzera 1998)**.** Trovare tutti i numeri primi p tali che $p^2 + 11$ abbia esattamente 6 divisori positivi.

Problemi da 3 punti

Problema 13 (Sam 3)**.** Sia I l'incentro di ABC e siano M, N i punti medi di AB, AC; siano inoltre K, L le intersezioni di BI, CI con MN. Dimostrare che

$$AI + BI + CI > BC + KL$$

Problema 14 (Nazionali Irlanda 1993)**.** Sia $p(x)$ un polinomio monico di grado n con tutte le radici reali e appartenenti all'intervallo $(0,1)$. Sia inoltre $p(1) = |p(0)|$. Dimostrare che il prodotto delle radici del polinomio non supera 2^{-n}.

Problema 15 (Nazionali Irlanda 1997)**.** Sia S l'insieme dei numeri naturali n con le seguenti proprietà:

- n ha 1000 cifre;
- tutte le cifre di n sono dispari;
- due cifre consecutive di n differiscono di ± 2.

Determinare il numero di elementi di S.

Problema 16 (Sam 4)**.** Siano h_1, h_2, h_3 le altezze di un triangolo e r il raggio del cerchio inscritto. Mostrare che $h_1 + h_2 + h_3 = 9r$ se e solo se il triangolo è equilatero.

Problema 17 (Nazionali Giappone 1993)**.** Denotiamo con $d(n)$ il più grande divisore dispari di $n \in \mathbb{N}$. Definiamo:

$$\begin{aligned} D(n) &= d(1) + d(2) + \cdots + d(n) \\ T(n) &= 1 + 2 + \cdots + n \end{aligned}$$

Dimostrare che per infiniti n si ha che $3D(n) = 2T(n)$.

Problema 18 (Olimpiadi Balcaniche 1984)**.** Siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ numeri reali positivi tali che $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Dimostrare che

$$\frac{a_1}{1 + a_2 + \cdots + a_n} + \frac{a_2}{1 + a_1 + a_3 + \cdots + a_n} + \cdots + \frac{a_n}{1 + a_1 + \cdots + a_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Problema 19 (Sam 5)**.** Siano C_1, C_2 due circonferenze che si intersecano in A, B. Sia C l'ulteriore intersezione con C_2 del diametro di C_1 per B e sia D l'ulteriore intersezione con C_1 del diametro di C_2 per B. Sia C_3 la circonferenza per B, C, D. Mostrare che il centro di C_3 sta su AB.

Problema 20 (Nazionali Irlanda 1993)**.** Si dimostri che comunque siano presi nel piano cartesiano 5 punti distinti a coordinate intere, per almeno una coppia di loro il segmento che li unisce passa per almeno un altro punto a coordinate intere.

Problema 21 (Davide 9)**.** Siano α, β e γ le radici di $x^3 - x - 1 = 0$. Calcolare

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}.$$

Problema 22 (Sam 8)**.** Sia I l'incentro di ABC e D la sua proiezione su BC. Sia inoltre E il simmetrico di D rispetto a I e F l'intersezione di AE con BC. Sapendo che $IO \parallel BC$, si imostri che $EF = 2(R - r)$.

Problema 23 (Nazionali Irlanda 1994)**.** Si consideri la successione di numeri interi definita da $x_1 = 2$ e $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$ per $n \geq 1$. Dimostrare che per ogni n:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \in \left[1 - \frac{1}{2^N}; 1 - \frac{1}{2^{2N}}\right], \qquad \text{dove } N = 2^{n-1}$$

Problemi da 4 punti

Problema 24 (Sam 7)**.** Siano dati nello spazio tre cerchi tangenti non complanari (due cerchi nello spazio sono tangenti se si incontrano in un solo punto e le loro rette tangenti in quel punto coincidono). Allora esiste una sfera che passa per tutti e tre.

Problema 25 (Nazionali Irlanda 1993)**.** Sono dati due numeri reali x, y che soddisfano:

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 17 = 0$$
$$y^3 - 3y^2 + 5y + 11 = 0$$

Determinare quanto vale $x + y$.

Problema 26 (Nazionali Irlanda 1999)**.** Trovare tutti gli interi positivi m tali che la quarta potenza del numero di divisori (positivi) di m sia uguale ad m stesso.

Problema 27 (Nazionali Irlanda 1993)**.** È data una circonferenza γ di raggio 1, un punto P su di essa e un reale $k > 1$. Determinare il luogo dei punti A che sono vertici di un triangolo ABC circoscritto a γ, con il lato BC tangente in P e tali che $BP \cdot PC = k$.

Problema 28 (Sam 9)**.** Siano I, J gli excentri di ACB opposti a A, B. Sia P un punto sulla circonferenza circoscritta ad ABC. Dimostrare che il punto medio tra i circocentri di ICP, JCP è il circocentro di ABC.

Problema 29 (Olimpiadi Asiatico-Pacifiche 1990)**.** Dimostrare che per ogni $n \geq 6$ esiste un esagono che può essere scomposto in esattamente n triangoli congruenti e disgiunti. (Due triangoli sono considerati disgiunti se non hanno punti interni in comune, mentre possono avere lati o vertici in comune.)

Problema 30 (Nazionali Irlanda 1994)**.** Trovare tutti i polinomi a coefficienti reali $p(x)$ tali che $p(x^2) = p(x-1)p(x)$ per ogni x reale.

Problema 31 (Sam 11)**.** Trovare gli n naturali per cui n e $2^n + 1$ hanno gli stessi divisori primi.

Problema 32 (Nazionali Iran 2002)**.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una funzione non decrescente. Dimostrare che esiste un punto $a \in \mathbb{R}$ tale che

$$f\left(a + \frac{1}{f(a)}\right) < 2f(a)$$

Problema 33 (Davide 13)**.** Sia S l'insieme formato dai vertici di un triangolo, dai punti che stanno sui suoi lati e dai punti interni al triangolo, il tutto privato di un singolo punto P strettamente interno al triangolo. Dimostrare che è possibile ricoprire S con un insieme di segmenti chiusi a due a due disgiunti e tutti contenuti in S.

Problema 34 (Nazionali Giappone 1993)**.** Ad una gara partecipano n studenti, e vengono proposti m problemi. Alla fine ogni studente ha risolto esattamente la metà dei problemi, inoltre ogni problema è stato risolto lo stesso numero di volte. Infine si sa che per ogni coppia di studenti, esattamente 3 problemi sono stati risolti da entrambi. Determinare tutte le possibili coppie (m, n), dando per ciascuna un esempio costruttivo.

Soluzioni

Soluzione del problema 1 (Vittone)**.** Calcoliamo i primi termini della successione in funzione di x_0 e x_1:

$$x_2 = \frac{1+x_1}{x_0}\,,$$

$$x_3 = \frac{1+\frac{1+x_1}{x_0}}{x_1} = \frac{1+x_0+x_1}{x_0 x_1}\,,$$

$$x_4 = \frac{1+\frac{1+x_0+x_1}{x_0 x_1}}{\frac{1+x_1}{x_0}} = \frac{1+x_0}{x_1}\,,$$

$$x_5 = \frac{1+\frac{1+x_0}{x_1}}{\frac{1+x_0+x_1}{x_0 x_1}} = x_0\,,$$

$$x_6 = \frac{1+x_0}{\frac{1+x_0}{x_1}} = x_1\,.$$

Dato che ciascun elemento della successione dipende solo dai due precedenti e poiché $x_5 = x_0$ e $x_6 = x_1$, ne segue che la successione si ripete periodicamente con periodo 5. Perciò $x_{2007} = x_2 = \frac{1+x_1}{x_0}$.

Soluzione del problema 2 (Vittone)**.** Diremo che una funzione $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è T-periodica se

$$k(x+T) = k(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

E' facile dimostrare che se k è T-periodica, allora è anche $2T$-periodica, $3T$-periodica, ecc.

Osservazione: di solito si dice che il periodo di k è il più piccolo dei numeri $T > 0$ (nota il minore stretto!) per cui (1) è vera. Nota che il più piccolo di tali T potrebbe non esistere anche se la funzione non è costante! Infatti la funzione non costante k definita da

$$k(x) = 0 \text{ se } x \in \mathbb{Q}, \qquad k(x) = 1 \text{ se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

è T-periodica ogni $T \in \mathbb{Q}$, dunque non esiste il minimo tra questi $T > 0$.

Tornando al nostro problema, notiamo che si può riscrivere la seconda ipotesi su f come

$$f\left(x + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) - f\left(x + \frac{1}{6}\right) = f\left(x + \frac{1}{7}\right) - f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Questo implica che la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = f\left(x + \frac{1}{7}\right) - f(x) = f\left(x + \frac{6}{42}\right) - f(x)$$

è $\frac{1}{6}$-periodica, cioè $\frac{7}{42}$-periodica.

Definiamo ora la funzione $h(x) = f(x+1) - f(x)$ e notiamo che

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x+1) - f(x) \\ &= f(x+1) - f\left(x + \frac{36}{42}\right) + f\left(x + \frac{36}{42}\right) - f\left(x + \frac{30}{42}\right) + \dots \\ & \quad - f\left(x + \frac{6}{42}\right) + f\left(x + \frac{6}{42}\right) - f(x) \\ &= g\left(x + \frac{36}{42}\right) + g\left(x + \frac{30}{42}\right) + \dots + g\left(x + \frac{6}{42}\right) + g(x) \\ &= g\left(x + \frac{1}{42}\right) + g\left(x + \frac{2}{42}\right) + \dots + g\left(x + \frac{6}{42}\right) + g(x)\,, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato più volte il fatto che la funzione g è $\frac{7}{42}$-periodica. Sfruttando ancora questa stessa periodicità si ha

$$\begin{aligned} h(x) &= g\left(x + \frac{1}{42}\right) + g\left(x + \frac{2}{42}\right) + \dots + g\left(x + \frac{6}{42}\right) + g(x) \\ &= g\left(x + \frac{1}{42}\right) + g\left(x + \frac{2}{42}\right) + \dots + g\left(x + \frac{6}{42}\right) + g\left(x + \frac{7}{42}\right) \\ &= h\left(x + \frac{1}{42}\right)\,. \end{aligned}$$

Ne segue che h è $\frac{1}{42}$-periodica, dunque è anche 1-periodica e quindi

$$\begin{aligned} & f(x+n) \\ &= f(x) + [f(x+1) - f(x)] + [f(x+2) - f(x+1)] + \dots + [f(x+n) - f(x+n-1)] \\ &\qquad = f(x) + h(x) + h(x+1) + \dots + h(x+n-1) = f(x) + nh(x) \quad (2) \end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed ogni $n \in \mathbb{N}$.
Affermo che $h(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; nota che questo implica esattamente che f è 1-periodica. Se questo non fosse vero esisterebbe un certo $\bar{x}$ tale che $h(\bar{x}) = f(\bar{x}+1) - f(\bar{x}) \neq 0$. Scegliamo dunque un certo $\bar{n} \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande affinché

$$|\bar{n}\, h(\bar{x})| > 2 \cdot 2007;$$

questo lo possiamo fare esattamente perché abbiamo supposto $h(\bar{x}) \neq 0$, altrimenti non sarebbe stato possibile! Riprendendo allora la (2) otteniamo

$$\begin{aligned} |f(\bar{x}+\bar{n})| &= |f(x) + \bar{n}h(\bar{x})| && \text{(uso la disuguaglianza triangolare)} \\ &\geq |\bar{n}h(\bar{x})| - |f(x)| && \text{(uso l'ipotesi } |f(x)| \leq 2007\text{)} \\ &\geq |\bar{n}h(\bar{x})| - 2007 \\ &> 2 \cdot 2007 - 2007 \;=\; 2007\,, \end{aligned}$$

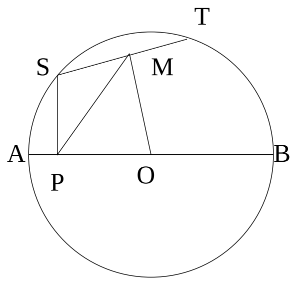
che contraddice l'ipotesi che f sia limitata da 2007, assurdo.
Ne segue che si deve necessariamente avere $h(x) = 0$ per ogni x, e quindi che f è 1-periodica.

Soluzione del problema 3 (Morandin)**.** Siano P, Q, R rispettivamente i centri dei triangoli equilateri costruiti sui lati AB, BC ed AC, e siano S, T, U i vertici fuori da AB degli stessi triangoli.
Ruotiamo tutta la figura attorno a P di un angolo di ampiezza $\pi/3$, ottenendo i nuovi punti A', B', eccetera. I punti A, A', C, C', U e U' formano un esagono regolare, quindi l'angolo $\widehat{A'CA}$ ha ampiezza $\pi/6$, e perciò A' deve stare sulla retta CQ. Siccome anche l'angolo $\widehat{C'A'P'}$ ha ampiezza $\pi/6$, anche il punto P' giace su $A'C$. Si noti poi che

$$A'P' + QC = AP + QC = \frac{AB + BC}{\sqrt{3}} = A'C = A'Q + QC$$

quindi P' coincide con Q. Si deduce immediatamente che i segmenti RP ed RQ hanno la stessa lunghezza e che l'angolo che individuano ha ampiezza $\pi/6$, quindi RPQ è equilatero.
Il baricentro di PQR d'altronde è il baricentro dei baricentri dei tre triangoli equilateri, e come tale è il baricentro dei punti S, T, U assieme ai punti A, B e C, contati due volte ciascuno. Visto che la misura delle altezze di ABS e BCT ha somma pari a quella di ACU, il baricentro di STU giace sulla retta AC, quindi anche quello di PQR.

Soluzione del problema 4 (Mongodi)**.** Sia O il centro della circonferenza; allora OM è perpendicolare a ST e dunque $PSMO$ è ciclico. Da ciò $\widehat{SPM} = \widehat{SOM}$ e $2\widehat{SOM} = \widehat{SOT}$ che dipende solo dalla lunghezza di ST,che è fissa.



Soluzione del problema 5 (Vittone)**.** Valutando l'equazione funzionale data nei punti $-x$ e $\frac{1}{x}$ otteniamo

$$\begin{cases} -\frac{1}{x}f(x) + f(-\frac{1}{x}) = -x \\ xf(-\frac{1}{x}) + f(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \qquad \text{per ogni } x \neq 0.$$

Risolvendo il sistema ottenuto (due equazioni e due incognite $f(x)$ e $f(-\frac{1}{x})$) si trova

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right).$$

Si verifica facilmente che tale funzione è effettivamente soluzione del nostro problema.

Soluzione del problema 6 (Morandin)**.** Dimostramo un risultato più forte, più precisamente che $(x + y, x^n + y^n) \le 2$. Siccome $xy > 1 \Rightarrow x + y > 2$ si ha la tesi.
Sia per assurdo $p \neq 2$ un primo che divide $x + y$ e $x^n + y^n$, allora, modulo p e usando la parità di n:

$$\left.\begin{array}{r} x \equiv -y \Rightarrow x^n \equiv y^n \\ x^n \equiv -y^n \end{array}\right\} \Rightarrow 2x^n \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 0 \Rightarrow x \equiv y \equiv 0$$

contro l'ipotesi che x e y siano coprimi.

Soluzione del problema 7 (Mongodi)**.** Sia r una retta del piano; scegliamo in ogni cerchio il diametro parallelo a r. La somma dei diametri dei cerchi più piccoli è 41, ma le loro proiezioni su r coprono un segmento di 10; se sopra ogni punto di tale proiezione vi fossero solo 4 diametri, la loro somma arriverebbe al più a 40. Dunque esiste un punto di r da cui la perpendicolare ad r incontra almeno 5 cerchi.

Soluzione del problema 8 (Vittone)**.** La scrittura $\overline{xyxy}$, in base 10, corrisponde al numero $N = 101(10x + y)$, il quale essendo di 4 cifre è minore di 10000. Inoltre esso è multiplo di 101, che è un numero primo; se dunque N fosse un cubo dovrebbe esere multiplo di 101^3, ma questo non può essere, avendosi $N < 10000 < 101^3$.
In generale, la scrittura $\overline{xyxy}$ corrisponde, in base b, al numero $(b^2+1)(xb+y)$; poichè $x, y \le b - 1$, si ha $xb + y < b^2 + 1$. Cominciamo con l'analizzare il caso $b = 2$; in questo caso avremmo $(b^2 + 1) = 5$, ed essendo 125 il più piccolo cubo mutiplo di 5 dovremmo avere

$$(xb + y) \ge \frac{125}{b^2 + 1} = 25 > b^2 + 1\,,$$

e questo non è possibile perché sappiamo che deve essere $xb + y < b^2 + 1$.
Analogamente, per

$$b = 3, 4, 5, 6$$

si ha, rispettivamente,

$$b^2 + 1 = 10, 17, 26, 37;$$

i minimi cubi che sono multipli di $b^2 + 1$ sono dunque

$$10^3, 17^3, 26^3, 37^3$$

rispettivamente. Supponendo che $(b^2 + 1)(xb + y)$ sia un cubo si giunge, come prima, ad un assurdo, perché $xb + y$ dovrebbe valere almeno

$$10^2, 17^2, 26^2, 37^2$$

rispettivamente, e ciascuno di questi numeri è più grande di b^2+1.
Se invece $b=7$ si ottiene $b^2+1=50=2\cdot 5^2$, e il più piccolo cubo multiplo di 50 è $2^3\cdot 5^3=1000$: è quindi evidente che in questo caso non si può applicare il ragionamento precedente, dato che $\frac{1000}{50}=20<50$. In effetti, con la scelta $x=2, y=6$ (che corrisponde a $xb+y=20$) si ottiene

$$\overline{2626}\ _7 = 2\cdot 343+6\cdot 49+2\cdot 7+6=1000=10^3.$$

La base cercata è dunque $b=7$.

Soluzione del problema 9 (Morandin)**.** Iterando la definizione

$$x_n=\frac{2(2n-1)}{n}\cdot x_{n-1}=\frac{2(2n-1)}{n}\cdot\frac{2(2n-3)}{n-1}\cdot x_{n-2}=\dots$$

si trova subito che

$$x_n=\frac{2^n(2n-1)(2n-3)\dots 3\cdot 1}{n!}$$

Il prodotto dei dispari può anche essere scritto come

$$(2n-1)(2n-3)\dots 3\cdot 1=\frac{(2n)!}{2n\cdot(2n-2)\dots 4\cdot 2}=\frac{(2n)!}{2^n n!}$$

Quindi

$$x_n=\frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{2^n}{n!}=\binom{2n}{n}$$

Perciò x_n è intero per ogni n.

Soluzione del problema 10 (Vittone)**.** Sviluppando il primo membro della disuguaglianza si ottiene

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)=1+\sum_{k=1}^{n}P_k \tag{3}$$

dove P_k è la somma di tutti i possibili prodotti degli x_i presi k alla volta, cioè

$$P_k=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}\,.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\frac{S^k}{k!} &= \frac{\overbrace{(x_1+\cdots+x_n)\cdots(x_1+\cdots+x_n)}^{k\text{ volte}}}{k!}\\ &= \sum_{\sigma:\{1,\dots,k\}\to\{1,\dots,n\}}\frac{x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(k)}}{k!}\end{aligned}$$

(il termine generico $x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(k)}$ nella sommatoria corrisponde, nello sviluppo esplicito di $(x_1+\cdots+x_n)^k$, a scegliere $x_{\sigma(1)}$ nel primo fattore, $x_{\sigma(2)}$ nel secondo, ecc.). Essendo gli x_i tutti positivi, ne segue che

$$\frac{S^k}{k!} \geq \sum_{\substack{\sigma:\{1,\ldots,k\}\to\{1,\ldots,n\}\\ \sigma \text{ iniettiva}}} \frac{x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(k)}}{k!}\,.$$

E' poi evidente che il valore di $x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(k)}$ non dipende da σ, ma solo dalla sua immagine (che è un sottinsieme di $\{1,\ldots,n\}$); in particolare, se $\sigma:\{1,\ldots,k\}\to\{1,\ldots,n\}$ è iniettiva, la sua immagine sarà un insieme di k elementi distinti $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ e si avrà

$$x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(k)} = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}\,.$$

Dato che ci sono esattamente $k!$ funzioni iniettive $\sigma:\{1,\ldots,k\}\to\{1,\ldots,n\}$ che hanno per immagine gli elementi $\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}$, si deve avere

$$\frac{S^k}{k!} \geq \sum_{\substack{\sigma:\{1,\ldots,k\}\to\{1,\ldots,n\}\\ \sigma \text{ iniettiva}}} \frac{x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(k)}}{k!} = \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k} = P_k\,.$$

Questo fatto, assieme alla (3), consente di concludere.

Soluzione del problema 11 (Mongodi)**.** Si ha $PA+PC \geq AC$ e $PB+PD \geq BD$ per la disuguaglianza triangolare; dunque, se E è l'intersezione di AC e BD, si avrà

$$(PA+PC)+(PB*PD) \geq (AE+EC)+(DE+EB) = AC+BD$$

Del resto, l'unico punto per cui entrambe le disuguaglianze si trasformano in uguaglianze è E (che realizza il minimo grazie alla convessità di $ABCD$).

Soluzione del problema 12 (Vittone)**.** Per $p=2,3$ otteniamo $p^2+11 = 15,20$ che hanno, rispettivamente, 4 e 6 divisori. Dunque 3 è soluzione del problema.
Se p è un primo diverso da 2 e 3, p^2+11 è sicuramente pari (perché p è dispari), e inoltre deve essere multiplo di 3 (dato che $p \equiv 1$ o $2 \bmod 3$, e in entrambi i casi $p^2 \equiv 1 \bmod 3$, da cui $p^2+11 \equiv 0 \bmod 3$). Ne segue che la scomposizione in fattori primi di p^2+11 è del tipo

$$p^2+11 = 2^\alpha 3^\beta q_1^{\gamma_1}\cdots q_k^{\gamma_k}$$

con q_i primi distinti (diversi da 2 e 3) e $\alpha,\beta \geq 1$ e $\gamma_i \geq 0$. Per la nota formula per calcolare il numero di divisori di un numero si deve avere

$$6 = \#\text{divisori di } (p^2+11) = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma_1+1)\cdots(\gamma_k+1)\,;$$

è dunque evidente (dato che $\alpha+1,\beta+1 \geq 2$) che si deve avere $\gamma_i = 0$ per ogni i e $(\alpha+1)(\beta+1) = 6$. Si distinguono dunque due casi:

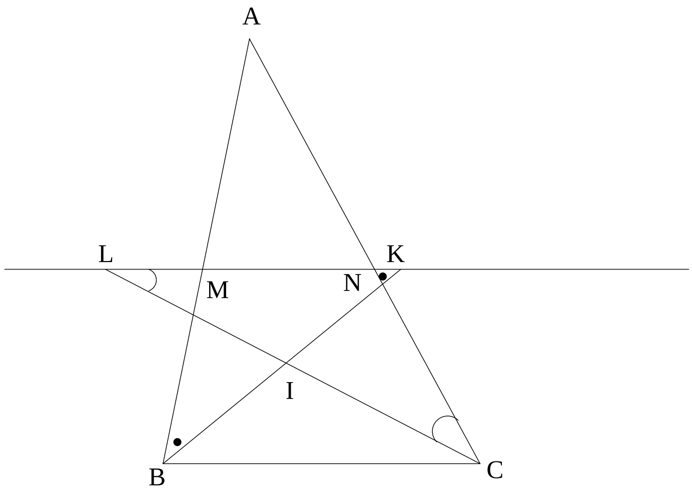
- $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, da cui $p^2 + 11 = 2^2 \cdot 3 = 12 \Rightarrow p = 1$, che non è primo;
- $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, da cui $p^2 + 11 = 2 \cdot 3^3 = 18 \Rightarrow p^2 = 7$, non accettabile.

Ne segue che l'unico primo che soddisfi le richieste è $p = 3$.

Soluzione del problema 13 (Mongodi)**.** Osserviamo che i triangoli MBK e NCL sono isosceli, in quanto BI e CI sono bisettrici e MN è parallela a BC. Quindi

$$KL = MK + NL - MN = MB + NC - MN = (AB + AC - BC)/2$$

dunque $KL + BC = p$ (semiperimetro) e, ovviamente, si ha $AI + BI > AB$ e cicliche, quindi, sommandole e dividendo per 2, si ottiene la tesi.



Soluzione del problema 14 (Morandin)**.** Siccome il polinomio è monico e ha tutte radici reali, possiamo scrivere $p(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$, dove α_i sono le radici, prese con le giuste molteplicità. Allora,

$$\prod \alpha_i = |p(0)| = p(1) = \prod (1 - \alpha_i) =: \prod \beta_i$$

dove $\beta_i := 1 - \alpha_i$, in modo tale che $\sum \alpha_i + \sum \beta_i = n$. Allora, per la disuguaglianza tra media geometrica e aritmetica applicata ai $2n$ numeri positivi $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, si ha:

$$\sqrt[n]{\prod \alpha_i} = \sqrt[2n]{\prod \alpha_i \beta_i} \leq \frac{\sum \alpha_i + \sum \beta_i}{2n} = \frac{1}{2}$$

da cui $\prod \alpha_i \leq 2^{-n}$.

Soluzione del problema 15 (Vittone)**.** Denotiamo con $n_1(k)$ il numero di naturali di k cifre che terminano per 1, le cui cifre sono tutte dispari e differiscono di ± 2 se sono consecutive; analogamente, $n_i(k)$ si riferirà ai numeri che terminano per i ($i = 3, 5, 7, 9$) e le cui k cifre soddisfano le stesse richieste. Non è difficile dimostrare che per ogni $k \geq 2$

$$\begin{aligned} n_1(k) &= n_3(k-1) \\ n_3(k) &= n_1(k-1) + n_5(k-1) \\ n_5(k) &= n_3(k-1) + n_7(k-1) \\ n_7(k) &= n_5(k-1) + n_9(k-1) \\ n_9(k) &= n_7(k-1), \end{aligned} \tag{4}$$

in quanto le prime $k-1$ cifre di un numero che rientra - ad esempio - fra gli $n_3(k)$ terminanti per 3, devono formare un numero che rientra o tra gli $n_1(k-1)$ (di $k-1$ cifre) terminanti per 1 oppure tra gli $n_5(k-1)$ (di $k-1$ cifre) terminanti per 5. In particolare, le formule (4) implicano che per ogni $k \geq 2$ si ha

$$n_5(k) = n_1(k) + n_9(k)\,. \tag{5}$$

Dalle (4) segue anche che

$$\begin{aligned} n_1(k) &= n_1(k-2) + n_5(k-2) \\ n_3(k) &= 2n_3(k-2) + n_7(k-2) \\ n_5(k) &= 2n_5(k-2) + n_1(k-2) + n_9(k-2) \\ &= n_5(k-2) + 2n_1(k-2) + 2n_9(k-2) \quad \text{(abbiamo usato (5))} \\ n_7(k) &= n_3(k-2) + 2n_7(k-2) \\ n_9(k) &= n_5(k-2) + n_9(k-2) \end{aligned} \tag{6}$$

per ogni $k \geq 3$. Definendo $N(k) = n_1(k) + n_3(k) + n_5(k) + n_7(k) + n_9(k)$ e sommando a destra e sinistra nelle uguaglienze (6) si ottiene

$$N(k) = 3\,N(k-2)\,.$$

Ne segue che $N(1000) = 3^{499} N(2)$, ed essendo $N(2) = 8$, si ottiene infine $N(1000) = 8 \cdot 3^{499}$, che è il numero cercato.

Soluzione del problema 16 (Mongodi)**.** Si ha

$$h_1 = \frac{2S}{a} \qquad h_2 = \frac{2S}{b} \qquad h_3 = \frac{2S}{c}$$

e

$$r = \frac{2S}{a+b+c}$$

Dunque vogliamo confrontare le due quantità

$$2S\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \qquad 9\frac{2S}{a+b+c}$$

Osserviamo che

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

è la disuguaglianza tra media aritmetica e media armonica per 3 termini e dunque

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} \geq 9\frac{2S}{a+b+c} = 9r$$

Come è noto si ha uguaglianza se e solo se $a = b = c$, quindi se e solo se il triangolo è equilatero.

Soluzione del problema 17 (Morandin)**.** Provando a mano per i valori piccoli di n si trova che vale l'uguaglianza per $n = 2, 6, 14, \ldots$.
Mostriamo per induzione che l'uguaglianza $3D(k_n) = 2T(k_n)$ vale in generale per $k_n := 2^n - 2$, $n \geq 2$.
La base dell'induzione è data dal caso $n = 2$, $k_2 = 2$ dove una verifica immediata mostra che $D(2) = 1 + 1 = 2$, $T(2) = 1 + 2 = 3$.
Per il passo induttivo, notiamo intanto che il termine di destra si calcola facilmente:

$$2T(k_n) = k_n(k_n + 1) = (2^n - 2)(2^n - 1) = 4^n - 3 \cdot 2^n + 2$$

Invece per quello di sinistra, sfruttando che $d(2a) = d(a)$:

$$\begin{aligned} D(k_n) &= d(1) + d(3) + \cdots + d(k_n - 1) & &+ d(2) + d(4) + \cdots + d(k_n) \\ &= 1 + 3 + \cdots + (2^n - 3) & &+ d(1) + d(2) + \cdots + d(2^{n-1} - 1) \\ &= (2^{n-1} - 1)^2 & &+ D(k_{n-1}) + d(2^{n-1} - 1) \end{aligned}$$

Quindi, appoggiandosi all'ipotesi induttiva su k_{n-1}, e notando che per $n \geq 2$, $2^{n-1} - 1$ è dispari,

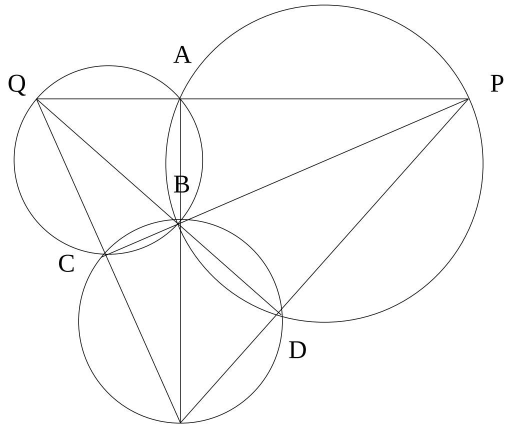
$$\begin{aligned} 3D(k_n) &= 3(2^{n-1} - 1)^2 + 2T(k_{n-1}) + 3(2^{n-1} - 1) \\ &= 3(4^{n-1} - 2^n + 1) + 4^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} + 2 + 3(2^{n-1} - 1) \\ &= 4^n - 3 \cdot 2^n + 2 \end{aligned}$$

Soluzione del problema 18 (Vittone)**.** L'espressione a primo membro è uguale a

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{2 - a_1} + \frac{a_2}{2 - a_2} + \cdots + \frac{a_n}{2 - a_n} \\ = \quad & -1 + \frac{2}{2 - a_1} - 1 + \frac{2}{2 - a_2} + \cdots - 1 + \frac{2}{2 - a_n} \\ = \quad & -n + n \cdot \frac{\frac{2}{2-a_1} + \frac{2}{2-a_2} + \cdots + \frac{2}{2-a_n}}{n} \\ \geq \quad & -n + n \cdot \frac{n}{\frac{2-a_1}{2} + \frac{2-a_2}{2} + \cdots + \frac{2-a_n}{2}} \\ = \quad & -n + \frac{2n^2}{2n - (a_1 + \cdots + a_n)} \quad = \quad \frac{n}{2n - 1}\,, \end{aligned}$$

dove la disuguaglianza è giustificata dalla relazione tra media aritmetica e media armonica.

Soluzione del problema 19 (Mongodi)**.** Siano BP il diametro di C_1 e BQ il diametro di C_2; allora $\widehat{BAP} = \widehat{BAQ} = \pi/2$, ovvero P, A, Q sono allineati. Inoltre $\widehat{BCA} = \widehat{BDA} = \pi/2$, dunque, se chiamiamo R l'intersezione di PD e QC, avremo che il quadrilatero $CBDR$ è ciclico, dunque RB è diametro di C_3 e B è ortocentro di PQR. Perciò RB è perpendicolare a PQ, ma lo è anche AB. In conclusione, R, B, A sono allineati.



Soluzione del problema 20 (Morandin)**.** Siano (x_i, y_i) per $i = 1, 2, \ldots, 5$ le coordinate dei punti. Consideriamo le 4 classi di resto modulo 2 che sono possibili in due dimensioni: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$; per il principio dei cassetti, esistono due dei 5 punti (i e j) che condividono le stesse classi di equivalenza. Di conseguenza il baricentro di tali due punti, che ovviamente sta sul segmento che li congiunge, ha coordinate intere $\left(\frac{x_i + x_j}{2}; \frac{y_i + y_j}{2}\right)$.

Soluzione del problema 21 (Vittone)**.** Sfruttando il fatto che $\alpha - \alpha^3 = -1$ abbiamo

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \frac{\alpha(1+\alpha)^2}{\alpha(1+\alpha)(1-\alpha)} = \frac{\alpha(1+\alpha)^2}{\alpha - \alpha^3} = -\alpha - 2\alpha^2 - \alpha^3 = -1 - 2\alpha - \alpha^2 \,.$$

Gli stessi conti si possono fare anche per β e γ e dunque

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma} = -3 - 2(\alpha + \beta + \gamma) - 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \,. \tag{7}$$

Poiché si ha l'uguaglianza

$$x^3 - x - 1 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

il principio di identità di polinomi implica che

$$\alpha\beta\gamma = 1, \qquad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -1, \qquad \alpha + \beta + \gamma = 0 \,. \tag{8}$$

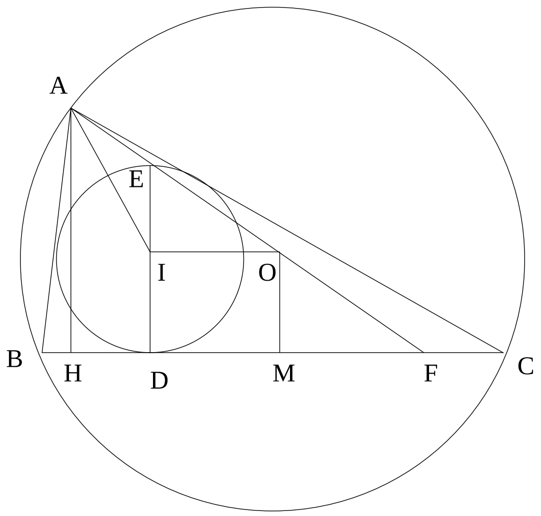
In particolare

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)=2\,. \tag{9}$$

Combinando (7), (8) e (9) si ottiene perciò

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}=-3+0-4=-7\,.$$

Soluzione del problema 22 (Mongodi)**.** Notiamo che il punto medio di BC (chiamiamolo M) è anche il punto medio di DF; infatti, $2\cdot BD = BC+AB-AC$ e si vede facilmente, tramite un'omotetia di centro A che porti E in F, che F è il punto di tangenza su BC del cerchio ex-inscritto, da cui $2\cdot CF=BC+AB-AC$. Ora, $OM=ID=ED/2$ e $MF=DF/2$, dunque EDF e OMF sono simili; allora E,F,O sono allineati. Inoltre, sia H il piede dell'altezza da A su BC; si ha che $\widehat{FIA}=\widehat{HAI}=\widehat{IAO}=\widehat{IAF}$ e dunque IAF è isoscele, ovvero $AF=IF=r$.
Infine, $EF=2(AO-AF)=2(R-r)$ che è la tesi.



Soluzione alternativa Per omotetia, F è il punto di tangenza del cerchio ex-inscritto opposto al vertice A; dunque, è noto che M, punto medio di DF. è anche punto medio di BC, da cui

$$DF=2DM=2IO$$

poichè $IO\parallel BC$. Perciò

$$DF=2IO=2\sqrt{R(R-2r)}$$

Del resto, $DE=2r$ e così

$$EF=\sqrt{4R^2-8Rr+4r^2}=\sqrt{4(R-r)^2}=2(R-r)$$

Soluzione del problema 23 (Morandin)**.** Provando a mano per i valori piccoli di n si trova che i primi valori di x_n sono 2, 3, 7, 43. Le somme dei reciproci sono

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}=1-\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}=1-\frac{1}{42},$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}=\frac{41\cdot 43+42}{42\cdot 43}=\frac{42\cdot 43-1}{42\cdot 43}=1-\frac{1}{42\cdot 43}.$$

Ispirati da questi esempi, dimostriamo che per ogni n

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=1-\frac{1}{x_{n+1}-1}=1-\frac{1}{x_n^2-x_n}.$$

Per induzione su n, la base essendo già stata verificata con gli esempi, supponendo l'enunciato vero per $n-1$, si vede subito che:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=1-\frac{1}{x_n-1}+\frac{1}{x_n}=1-\frac{x_n-x_n+1}{x_n^2-x_n}=1-\frac{1}{x_n^2-x_n}.$$

Resta da dimostrare che $\frac{1}{x_n^2-x_n} \in \left[2^{-2N};2^{-N}\right]$, ovvero che $x_n^2-x_n \in \left[2^N;2^{2N}\right]$.
Visto che $x_n^2-x_n=x_{n+1}-1$, dimostramo che $2^N+1 \leq x_{n+1} \leq 2^{2N}$.
Di nuovo per induzione, ciò è vero per $n=1$ in quanto $2^1+1=3=x_2 \leq 2^2$.
Ricordando che $N=2^{n-1}$, e supponendolo le disuguaglianze vere per n, ovvero $2^{N/2}+1 \leq x_n \leq 2^N$, si trova che

$$\begin{aligned} x_n^2-x_n=x_n(x_n-1) &\leq 2^N(2^N-1) \leq 2^{2N} \\ x_n(x_n-1) &\geq (2^{N/2}+1)2^{N/2} \geq 2^N+1. \end{aligned}$$

Soluzione del problema 24 (Mongodi)**.** Realizziamo un'inversione sferica che abbia centro in uno dei punti di tangenza; due delle tre circonferenze si trasformano in rette complanari (in quanto diventano due rette entrambe parallele alla tangente comune delle circonferenze di partenza). La terza circonferenza diventerà tangente a entrambe le rette e quindi complanare; ma l'inverso di un piano che non passa per il centro è una sfera che passa per il centro, quindi otteniamo la tesi.

Soluzione del problema 25 (Morandin)**.** I grafici dei due polinomi che fanno da termini di sinistra sono identici ma traslati in verticale di 28 unità. Il polinomio "media" è

$$m(z) := z^3-3z^2+5z-3$$

Si vede subito che si annulla in 1, quindi è immediato fattorizzarlo, ottenendo

$$m(z)=(z-1)(z^2-2z+3)=(z-1)^3+2(z-1)$$

Quindi $m(z)$ è simmetrico rispetto al punto (1,0); inoltre evidentemente $m(z) = k$ ha una sola radice reale per ogni $k \in \mathbb{R}$. I numeri reali x, y del problema sono allora le uniche soluzioni di

$$m(x) = 14, \qquad m(y) = -14$$

Ma per la simmetria di m, deve essere $\dfrac{x+y}{2} = 1$, perciò $x + y = 2$.

Soluzione del problema 26 (Vittone)**.** Poiché m deve essere una potenza quarta, ogni fattore primo che appare nella sua scomposizione deve essere elevato ad una potenza multipla da 4, e quindi si può scrivere

$$m = p_1^{4\alpha_1} \cdots p_k^{4\alpha_k}$$

dove i p_i sono primi distinti tali che $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$; escludendo il caso $m = 1$ (che è soluzione del problema) si ha anche $p_i \geq 2$. Per la nota formula per calcolare il numero di divisori di un intero si ha

$$(4\alpha_1 + 1)^4 \cdots (4\alpha_k + 1)^4 = m = p_1^{4\alpha_1} \cdots p_k^{4\alpha_k} ,$$

e poiché il termine a sinistra è evidentemente dispari, m stesso deve esserlo, e quindi $p_i \geq 3$ per ogni i. La formula precedente implica che

$$n := (4\alpha_1 + 1) \cdots (4\alpha_k + 1) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = \sqrt[4]{m} \, . \tag{10}$$

Non è difficile dimostrare, ad esempio per induzione, che

- $\alpha \geq 3 \Rightarrow 3^\alpha > 4\alpha + 1$;
- $\alpha \geq 2 \Rightarrow 5^\alpha > 4\alpha + 1$;
- $p^\alpha > 4\alpha + 1$ per ogni $\alpha \geq 1$ ed ogni p primo maggiore di 5.

Ne segue che, nello sviluppo di n, almeno uno tra i fattori $p_i^{\alpha_i}$ deve essere uguale a $3^1, 3^2$ o 5^1; altrimenti, per le disuguaglianze appena enunciate, tutti i fattori che compaiono a secondo membro dell'uguaglianza (10) sarebbero strettamente maggiori dei relativi termini a primo membro, e quindi non potrebbe valere l'uguaglianza.
Supponiamo che non compaia il termine 3^1; poiché si hanno le uguaglianze $3^\alpha = 4\alpha+1$ per $\alpha = 2$, e $5^\alpha = 4\alpha+1$ per $\alpha = 1$, nessun altro termine $p_i^{\alpha_i}$ può comparire, nello sviluppo di n, all'infuori degli stessi 3^2 e 5^1: altrimenti, nella (10), avremmo a secondo membro alcuni termini (3^2 o 5^1) che sono uguali ai relativi termini al primo membro, e alcuni altri termini (gli altri) che sono strettamente maggiori. Ne seguirebbe che deve valere una disuguaglianza stretta tra i due membri, mentre deve valere l'uguaglianza. In effetti si può verificare che i casi $n = 3^2, 5$ e $3^2 \cdot 5$ "vanno bene", nel senso che ci

riconducono ai numeri $m = 3^8, 5^4$ e $3^8 \cdot 5^4$ che sono effettivamente soluzioni del nostro problema.
Resta dunque da analizzare il caso in cui si abbia $n = 3 \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, con $p_i \geq 5$. Riprendendo la (10) si ottiene, dato che $\alpha_1 = 1$, che

$$5(4\alpha_2 + 1) \cdots (4\alpha_k + 1) = 3 \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \tag{11}$$

e quindi $p_2 = 5$. Non è possibile che $\alpha_2 = 1$, altrimenti avremmo

$$5 \cdot 5(4\alpha_3 + 1) \cdots (4\alpha_k + 1) = 3 \cdot 5 p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

e dunque il fattore 5 comparirebbe due volte a primo membro, ma una sola volta a secondo membro. Si ha perciò $\alpha_2 \geq 2$, ma d'altra parte si può mostrare, ancora per induzione, che

$$5^\alpha > 3(4\alpha + 1) \qquad \text{se } \alpha \geq 2\,. \tag{12}$$

Sviluppando allora il primo membro della (11) si ottiene

$$5(4\alpha_2 + 1) \cdots (4\alpha_k + 1) < 3 \cdot 3(4\alpha_2 + 1) p_3^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} < 3 \cdot 5^{\alpha_2} p_3^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

che dovrebbe invece essere il primo membro dell'uguaglianza; ne segue dunque che essa stessa non può sussistere.
Le uniche soluzioni al problema sono dunque $1, 3^8, 5^4$ e $3^4 5^8$.
Oservazione. L'idea di fondo che sta alla base di disuguaglianze come la (12) è che "da un certo punto in poi, un esponenziale è più grande di una funzione lineare". Questa osservazione però non è certamente una dimostrazione, ma va formalizzata per bene, e a tale scopo uno strumento quasi indispensabile è l'induzione. Proviamo ad esempio a dimostrare proprio la (12):

- è evidentemente vera per $\alpha = 2$;
- se $5^\alpha > 3(4\alpha + 1)$, allora

$$5^{\alpha+1} = 5 \cdot 5^\alpha > 5 \cdot 3(4\alpha + 1) = 3(20\alpha + 5) > 3(4(\alpha + 1) + 1)\,.$$

Soluzione del problema 27 (Morandin)**.** La congettura è che il luogo dei punti sia una retta parallela alla tangente a γ per P. Sia O il centro di γ; considerato quindi un triangolo ABC che soddisfi le condizioni, siano M e N i punti di tangenza di AB ed AC con la circonferenza, e sia H l'intersezione tra il prolungamento di OP e la parallela a BC passante per A. Siano inoltre h e z le misure di OH e AH. Allora per Pitagora:

$$AH^2 + OH^2 = OA^2 = AM^2 + OM^2$$

da cui $d := AM = AN = \sqrt{z^2 + h^2 - 1}$. Dette poi x e y le misure di BP e PC, e supponendo ad esempio che $x \geq y$, in modo tale che A e C stiano dalla stessa parte della retta HP:

$$(d+x)^2 = (AN+NB)^2 = AB^2 = HP^2 + (AH+BP)^2 = (h+1)^2 + (z+x)^2$$

e analogamente

$$(d+y)^2 = (AM+MC)^2 = AC^2 = HP^2 + (AH-PC)^2 = (h+1)^2 + (z-y)^2$$

Ricordando che $d^2 = z^2 + h^2 - 1$, si ricava facilmente

$$\begin{aligned} 2(d+z)x + d^2 = 1 + h^2 + z^2 + 2h \quad &\Leftrightarrow \quad x = \frac{h+1}{d+z} \\ 2(d-z)y + d^2 = 1 + h^2 + z^2 + 2h \quad &\Leftrightarrow \quad y = \frac{h+1}{d-z} \end{aligned}$$

da cui finalmente

$$k = xy = \frac{(h+1)^2}{d^2 - z^2} = \frac{h+1}{h-1}, \qquad \text{ovvero} \qquad h = \frac{k+1}{k-1}$$

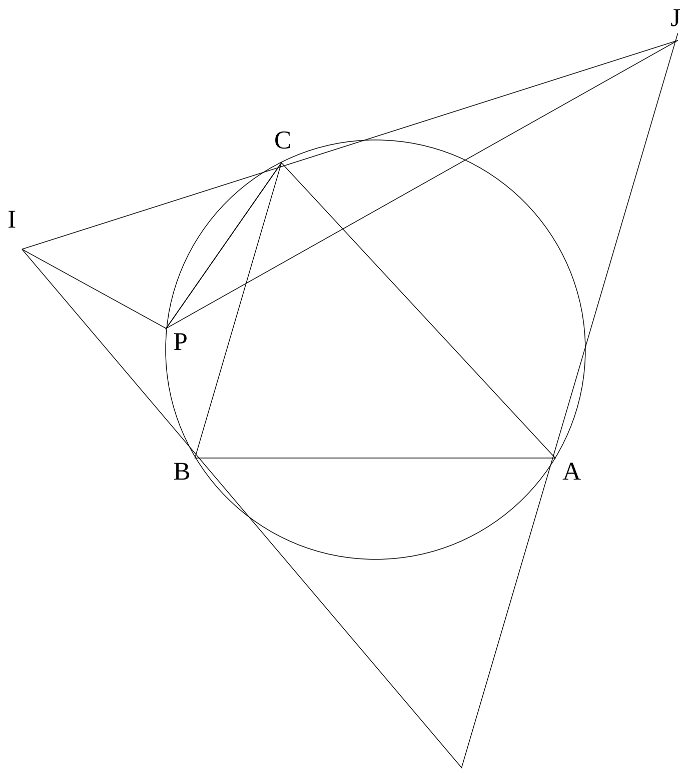
Essendo tutti i passaggi invertibili, si può concludere che

i. se la distanza di A dalla retta tangente a γ in P è $1 + (k+1)/(k-1)$, allora $BP \cdot PC = k$, quindi A appartiene al luogo di punti cercato;

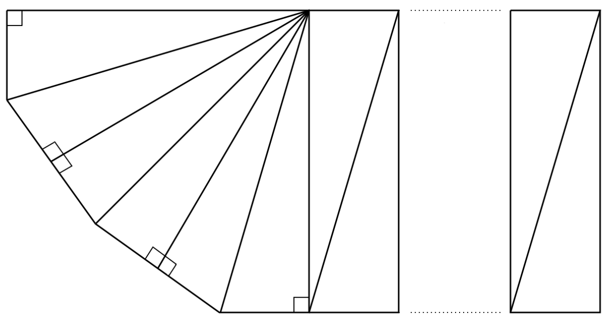
ii. se A appartiene al luogo di punti cercato, quindi la distanza di A dalla retta tangente a γ in P è $1 + (k+1)/(k-1)$.

In conclusione, il luogo di punti cercato è costitutito esattamente dalla retta ortogonale ad OP, distante $1 + (k+1)/(k-1)$ da P e più vicina ad O che a P.

Soluzione del problema 28 (Mongodi)**.** Osserviamo che il circocentro O di ABC sta sull'asse di CP come pure i circocentri di ICP e JCP. Ora, notiamo che il cerchio circoscritto ad ABC è la circonferenza di Feuerbach del triangolo degli ex-incentri e dunque interseca IJ nella base dell'altezza (C) e nel punto medio M; questo significa che la proiezione del circocentro di ABC su IJ sarà il punto medio tra C e M. Del resto, le proiezioni dei circocentri di ICP e JCP sono i punti medi di IC e JC, il cui punto medio è per l'appunto il punto medio di CM.

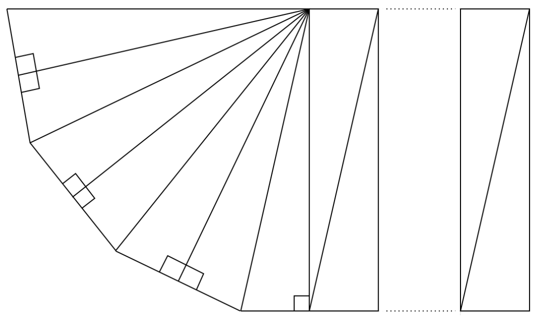


Soluzione del problema 29 (Vittone)**.** Iniziamo ad analizzare il caso in cui $n \geq 6$ è pari. Per $n = 6$ basta considerare la decomposizione canonica di un esagono regolare in 6 triagoli equilateri congruenti (ottenuti congiungendo i vertici dell'esagono col suo centro); se invece $n \geq 8$ scriviamo $n = 2h+6$, $h \geq 1$ e consideriamo un esagono formato da n triangoli rettangoli, congruenti e con un angolo di 15°, disposti come in figura:

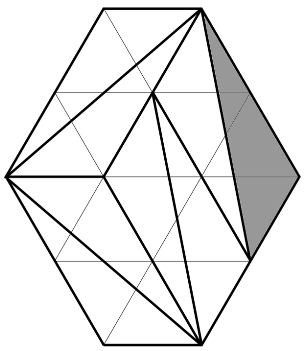


dove 6 degli esagoni sono disposti a formare il "ventaglio" a sinistra, cui vengono attaccati sulla destra h rettangoli (con lati pari ai cateti dei triangoli considerati) ciascuno fromato da 2 triangoli. E' facile verificare che la figura, nel suo complesso, è effettivamente un esagono che è convesso (gli angoli sono tutti minori di o uguali a 180°).

Se invece n è dispari utilizziamo la seguente costruzione se $n \geq 9$:



dove abbiamo utilizzato $n = 7 + 2h$ triangoli rettangoli rettangoli con un angolo di $(90/7)°$, disponendone 7 a formare il "ventaglio" sulla sinistra e poi affiancandovi sulla destra h rettangoli ciascuno formato da 2 dei triangoli. Una costruzione differente va utilizzata per $n = 7$, ad esempio considerando



che è ottenuta affiancando inizialmente 16 triangoli equilateri congruenti (mostrati con bordo più sottile) e suddividendo la figura ricavata in 8 parallelogrammi congruenti (mostrati con i bordi ispessiti), ciascuno suddiviso in due triangoli (tutti congruenti fra loro) tracciando la diagonale maggiore, ed infine eliminando uno degli 8 triangoli (per la precisione, quello colorato in grigio).

Osservazione. Ci sono innumerevoli modi di risolvere questo problema. Un'osservazione interessante consisteva nell'osservare che, se trovo un esagono suddividibile in n triangoli congruenti, allora lo stesso è suddividibile anche in $4n$ triangoli congruenti: infatti è sufficiente suddividere ciascuno degli n triangoli in 4 triangoli più piccoli, ottenuti congiungendo a due a due i punti medi dei tre lati, che risultano congruenti. Applicando più volte lo stesso ragionamento si riesce a dimostrare la tesi per $16n, 64n$, ecc., e quindi (con un po' di ragionamenti) si ricava che sarebbe sufficiente risolvere i seguenti casi particolari:

- $n = 2k$, con $k \geq 3$ dispari;
- $n = 8, 16$;
- $n \geq 7$ dispari;
- $n = 4 \cdot 3$ e $n = 4 \cdot 5$.

Soluzione del problema 30 (Morandin)**.** Si nota subito che se α è una radice complessa di $p(x)$, allora anche α^2 e $(\alpha+1)^2$ sono radici di $p(x)$. Ciò significa la successione α^{2^n} può assumere solo un numero finito di valori in $\mathbb{C}$, quindi tutte le radici devono avere modulo unitario.
Per lo stesso motivo deve essere anche $|\alpha + 1| = 1$ per ogni radice α. Solo due punti ξ_1 e ξ_2 sul piano complesso soddisfano entrambe le condizioni: sono le due radici cubiche dell'unità che non appartengono ad $\mathbb{R}$. Visto che i coefficienti del polinomio sono reali, ξ_1 e ξ_2 devono comparire con la stessa molteplicità n, quindi necessariamente $p(x) = (x^2 + x + 1)^n$.
La verifica che tale condizione è anche sufficiente è immediata:

$$\begin{aligned} p(x-1)p(x) &= (x^2 - 2x + 1 + x - 1 + 1)^n (x^2 + x + 1)^n \\ &= (x^2 - x + 1)^n (x^2 + x + 1)^n = (x^4 + x^2 + 1)^n = p(x^2) \end{aligned}$$

Soluzione del problema 31 (Mongodi)**.** Sia p il più grande primo che divide $2^n + 1$; allora $p|n$ e $2^p + 1|2^n + 1$. Sia ora q il più grande primo che divide $2^p + 1$; si ha $q \leq p$ e $q|n$; se $q > 3$, $q|2^{2p} - 1$ e $q|2^{q-1} - 1$. Dunque, $q|2^k - 1$ con $k = (q-1, 2p)$, da cui $k = 2$ e dunque $q|3$, che è assurdo. Perciò $q = 3$ e $2^p + 1 = 3^m$ ha come unica soluzione $p = 3$. Dunque $2^n + 1 = 3^r$ che ha come soluzione $n = 3$ (in quanto $3|n$).

Soluzione del problema 32 (Morandin)**.** Definiamo per ricorrenza la successione di punti $a_0 := 0$, $a_{n+1} := a_n + \dfrac{1}{f(a_n)}$. Iterando la definizione si vede che deve valere:

$$a_n = \frac{1}{f(a_0)} + \frac{1}{f(a_1)} + \cdots + \frac{1}{f(a_{n-1})}$$

Se supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa per ogni a, si ha che $f(a_{n+1}) \geq 2f(a_n)$, per cui iterando la disuguaglianza, si ha che $f(a_n) \geq 2^n f(0)$ e quindi $1/f(a_n) \leq 2^{-n}/f(0)$.
Quindi

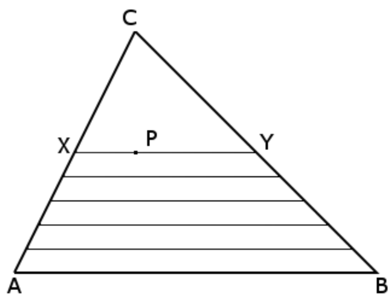
$$a_n \leq \frac{1}{f(0)} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq \frac{2}{f(0)}$$

Visto che f è non decrescente, dovrebbe essere per ogni n

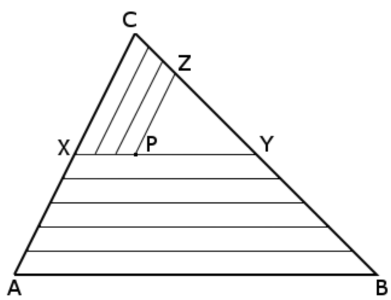
$$f(a_n) \leq f(2/f(0))$$

ma d'altronde $f(a_n) \geq 2^n f(0)$, che non può essere limitato superiormente, quindi troviamo l'assurdo.

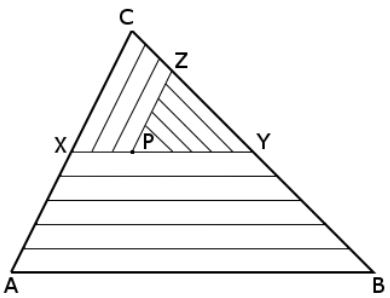
Soluzione del problema 33 (Vittne)**.** Detti A, B, C i tre vertici del triangolo, siano X e Y i punti in cui la parallela al lato AB passante per P incontra, rispettivamente, i lati AC e BC; per ogni punto del segmento AX (A incluso, X escluso) consideriamo il segmento parallelo al lato AB che lo congiunge al corrispondente punto su BY (B incluso, X escluso), come in figura:



In questo modo siamo riusciti a ricoprire con triangoli chiusi disgiunti solo una parte di ABC; quel che resta da ricoprire è esattamente il triangolo XYC comprensivo dei suoi lati ma non del punto P. Sia Z il punto in cui la parallela ad AC passante per P incontra il YC; come prima, per ogni punto di XP (X incluso, P escluso) tracciamo il segmento chiuso, parallelo ad AC, che lo congiunge al corrispondente punto di CZ (C incluso, Z escluso), come mostrato in figura:



Quello che rimane da coprire, a questo punto, è il triangolo PYZ comprensivo dei lati ma non del punto P, e questo può essere fatto utilizzando segmnenti chiusi disgiunti paralleli al lato YZ e aventi per estremi punti di PZ (Z incluso, P escluso) e di PY (Y incluso, P escluso), come in figura



Si verifica facilmente che tutti i segmenti che abbiamo utilizzato sono chiusi e disgiunti e ricoprono esattamente l'area S richiesta.

Soluzione del problema 34 (Morandin)**.** Ogni studente risolve $a := m/2$ problemi, quindi in totale i problemi risolti sono $nm/2$, perciò ogni problema è risolto da $b := n/2$ studenti, e quindi n e m devono essere pari.
Se consideriamo gli a problemi risolti dal primo studente, ognuno degli altri $(2b-1)$ studenti ne deve avere risolti 3. D'altronde ognuno di questi a problemi deve essere stato risolto b volte, quindi deve valere:

$$a + 3(2b-1) = ab \Leftrightarrow a = \frac{3(2b-1)}{b-1} = 6 + \frac{3}{b-1}$$

Le uniche soluzioni intere positive sono $a = 9, b = 2$ ed $a = 7, b = 4$. Entrambe le configurazioni sono realizzabili, come mostrano gli esempi seguenti:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1

In conclusione le coppie (m, n) possibili sono solo $(18, 4)$ e $(14, 8)$.