

Quinto Stage Olimpico di Parma – 2007

Gara a premi

Problemi da 2 punti

(Riservati ai non medaglie d'oro)

Problema 1 (Davide 1). Sia $\{x_n\}_n$ una successione tale che x_0, x_1 sono numeri reali positivi e

$$x_{n+2} = \frac{1 + x_{n+1}}{x_n} \quad \text{per ogni } n \geq 0.$$

Trovare x_{2007} .

Problema 2 (Davide 2). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non costante che per ogni $x \in \mathbb{R}$ soddisfi

- $|f(x)| \leq 2007$;
- $f(x + \frac{13}{42}) + f(x) = f(x + \frac{1}{6}) + f(x + \frac{1}{7})$.

Dimostrare che f è periodica.

Problema 3 (Nazionali Irlanda 1994). Sia B un punto qualsiasi interno ad un segmento AC . Si traccino i triangoli equilateri di lati AB, BC (da un lato della retta AC) ed AC (dall'altro lato). Dimostrare che i loro tre centri formano un triangolo equilatero con centro su AC .

Problema 4 (Sam 1). Sia data una circonferenza di diametro AB e sia fissata una lunghezza $d < AB$. Sia ST una corda di lunghezza d e siano P la proiezione di S su AB , M il punto medio di ST . Mostrare che, al variare di ST tra le corde di lunghezza d , l'angolo \widehat{SPM} rimane costante.

Problema 5 (Davide 3). Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfino

$$\frac{1}{x}f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x \quad \text{per ogni } x \neq 0.$$

Problema 6 (Nazionali Giappone 1992). Siano x, y interi positivi coprimi con $xy > 1$, e sia n un intero positivo pari. Dimostrare che $x^n + y^n$ non è divisibile per $x + y$.

Problema 7 (Sam 2). Sono dati nel piano alcuni cerchi i cui diametri sommano a 41 ed esiste un cerchio di diametro 10 che li contiene tutti. Dimostrare che esiste una retta che interseca più di 4 cerchi.

Problema 8 (Davide 4). Mostrare che nessun intero della forma \overline{xyxy} (scritto in base 10) può essere un cubo perfetto. Trovare la più piccola base $b > 1$ per cui esiste un cubo perfetto della forma \overline{xyxy} (scritto in base b).

Problema 9 (Nazionali Irlanda 1994). Si consideri la successione di numeri reali definita da $x_1 = 2$ e $nx_n = 2(2n - 1)x_{n-1}$ per $n \geq 2$. Dimostrare che tutti i termini della successione sono interi.

Problema 10 (Davide 5). Siano x_1, \dots, x_n ($n \geq 2$) numeri reali positivi e definiamo $S = x_1 + \dots + x_n$. Dimostrare che

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \leq 1 + S + \frac{S^2}{2!} + \frac{S^3}{3!} + \cdots + \frac{S^n}{n!}.$$

Problema 11 (Sam 6). Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso; determinare i punti P che minimizzano

$$PA + PB + PC + PD$$

Problema 12 (Davide 6). Trovare tutti i numeri primi p tali che $p^2 + 11$ abbia esattamente 6 divisori positivi.

Problemi da 3 punti

Problema 13 (Sam 3). Sia I l'incentro di ABC e siano M, N i punti medi di AB, AC ; siano inoltre K, L le intersezioni di BI, CI con MN . Dimostrare che

$$AI + BI + CI > BC + KL$$

Problema 14 (Nazionali Irlanda 1993). Sia $p(x)$ un polinomio monico di grado n con tutte le radici reali e appartenenti all'intervallo $(0, 1)$. Sia inoltre $p(1) = |p(0)|$. Dimostrare che il prodotto delle radici del polinomio non supera 2^{-n} .

Problema 15 (Davide 7). Sia S l'insieme dei numeri naturali n con le seguenti proprietà:

- n ha 1000 cifre;
- tutte le cifre di n sono dispari;
- due cifre consecutive di n differiscono di ± 2 .

Determinare il numero di elementi di S .

Problema 16 (Sam 4). Siano h_1, h_2, h_3 le altezze di un triangolo e r il raggio del cerchio inscritto. Mostrare che $h_1 + h_2 + h_3 = 9r$ se e solo se il triangolo è equilatero.

Problema 17 (Nazionali Giappone 1993). Denotiamo con $d(n)$ il più grande divisore dispari di $n \in \mathbb{N}$. Definiamo:

$$D(n) = d(1) + d(2) + \dots + d(n)$$

$$T(n) = 1 + 2 + \dots + n$$

Dimostrare che per infiniti n si ha che $3D(n) = 2T(n)$.

Problema 18 (Davide 8). Siano a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 2$) numeri reali positivi tali che $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Dimostrare che

$$\frac{a_1}{1 + a_2 + \dots + a_n} + \frac{a_2}{1 + a_1 + a_3 + \dots + a_n} + \dots + \frac{a_n}{1 + a_1 + \dots + a_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Problema 19 (Sam 5). Siano C_1, C_2 due circonferenze che si intersecano in A, B . Sia C l'ulteriore intersezione con C_2 del diametro di C_1 per B e sia D l'ulteriore intersezione con C_1 del diametro di C_2 per B . Sia C_3 la circonferenza per B, C, D . Mostrare che il centro di C_3 sta su AB .

Problema 20 (Nazionali Irlanda 1993). Si dimostri che comunque siano presi nel piano cartesiano 5 punti distinti a coordinate intere, per almeno una coppia di loro il segmento che li unisce passa per almeno un altro punto a coordinate intere.

Problema 21 (Davide 9). Siano α, β e γ le radici di $x^3 - x - 1 = 0$. Calcolare

$$\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} + \frac{1 + \beta}{1 - \beta} + \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}.$$

Problema 22 (Sam 8). Sia I l'incentro di ABC e D la sua proiezione su BC . Sia inoltre E il simmetrico di D rispetto a I e F l'intersezione di AE con BC . Sapendo che $IO \parallel BC$, si mostri che $EF = 2(R - r)$.

Problema 23 (Nazionali Irlanda 1994). Si consideri la successione di numeri interi definita da $x_1 = 2$ e $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$ per $n \geq 1$. Dimostrare che per ogni n :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \in \left[1 - \frac{1}{2^N}; 1 - \frac{1}{2^{2N}} \right], \quad \text{dove } N = 2^{n-1}$$

Problemi da 4 punti

Problema 24 (Sam 7). Siano dati nello spazio tre cerchi tangenti non complanari (due cerchi nello spazio sono tangenti se si incontrano in un solo punto e le loro rette tangenti in quel punto coincidono). Allora esiste una sfera che passa per tutti e tre.

Problema 25 (Nazionali Irlanda 1993). Sono dati due numeri reali x, y che soddisfano:

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 17 = 0$$

$$y^3 - 3y^2 + 5y + 11 = 0$$

Determinare quanto vale $x + y$.

Problema 26 (Davide 10). Trovare tutti gli interi positivi m tali che la quarta potenza del numero di divisori (positivi) di m sia uguale ad m stesso.

Problema 27 (Nazionali Irlanda 1993). È data una circonferenza γ di raggio 1, un punto P su di essa e un reale $k > 1$. Determinare il luogo dei punti A che sono vertici di un triangolo ABC circoscritto a γ , con il lato BC tangente in P e tali che $BP \cdot PC = k$.

Problema 28 (Sam 9). Siano I, J gli excentri di ACB opposti a A, B . Sia P un punto sulla circonferenza circoscritta ad ABC . Dimostrare che il punto medio tra i circocentri di ICP, JCP è il circocentro di ABC .

Problema 29 (Davide 11). Dimostrare che per ogni $n \geq 6$ esiste un esagono che può essere scomposto in esattamente n triangoli congruenti e disgiunti. (Due triangoli sono considerati disgiunti se non hanno punti interni in comune, mentre possono avere lati o vertici in comune.)

Problema 30 (Nazionali Irlanda 1994). Trovare tutti i polinomi a coefficienti reali $p(x)$ tali che $p(x^2) = p(x-1)p(x)$ per ogni x reale.

Problema 31 (Sam 11). Trovare gli n naturali per cui n e $2^n + 1$ hanno gli stessi divisori primi.

Problema 32 (Nazionali Iran 2002). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ una funzione non decrescente. Dimostrare che esiste un punto $a \in \mathbb{R}$ tale che

$$f\left(a + \frac{1}{f(a)}\right) < 2f(a)$$

Problema 33 (Davide 13). Sia S l'insieme formato dai vertici di un triangolo, dai punti che stanno sui suoi lati e dai punti interni al triangolo, il tutto privato di un singolo punto P strettamente interno al triangolo. Dimostrare che è possibile ricoprire S con un insieme di segmenti chiusi a due a due disgiunti e tutti contenuti in S .

Problema 34 (Nazionali Giappone 1993). Ad una gara partecipano n studenti, e vengono proposti m problemi. Alla fine ogni studente ha risolto esattamente la metà dei problemi, inoltre ogni problema è stato risolto lo stesso numero di volte. Infine si sa che per ogni coppia di studenti, esattamente 3 problemi sono stati risolti da entrambi. Determinare tutte le possibili coppie (m, n) , dando per ciascuna un esempio costruttivo.