

## Problemi Balkan

### Balkan 1984

1. Siano  $x_1, x_2, \dots, x_n$  reali positivi tali che  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ . Dimostrare che

$$\frac{x_1}{2-x_1} + \frac{x_2}{2-x_2} + \dots + \frac{x_n}{2-x_n} \geq \frac{n}{2n-1}$$

2.  $ABCD$  è un quadrilatero ciclico.  $A'$  è l'ortocentro di  $BCD$ ,  $B'$  è l'ortocentro di  $CDA$ ,  $C'$  è l'ortocentro di  $DAB$ ,  $D'$  è l'ortocentro di  $ABC$ . Dimostrare che  $A'B'C'D'$  è congruente ad  $ABCD$ .
3. Dimostrare che, per ogni intero positivo  $n$ , esiste un intero  $m > n$  tale che l'espressione decimale di  $5^m$  si può ottenere aggiungendo cifre a sinistra di quella di  $5^n$ .
4. Dati i reali positivi  $a, b, c$ , trovare tutte le soluzioni reali  $(x, y, z)$  del sistema:

$$\begin{aligned}ax + by &= (x - y)^2 \\by + cz &= (y - z)^2 \\cz + ax &= (z - x)^2\end{aligned}$$

### Balkan 1985

1.  $ABC$  è un triangolo,  $O$  è il circocentro,  $D$  è il punto medio di  $AB$  ed  $E$  è il baricentro di  $ACD$ . Dimostrare che  $OE$  è perpendicolare a  $CD$  se e soltanto se  $AB = AC$ .
2. I reali  $w, x, y, z$  sono compresi tra  $-\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{\pi}{2}$  e soddisfano:

$$\sin w + \sin x + \sin y + \sin z = 1$$

$$\cos 2w + \cos 2x + \cos 2y + \cos 2z \geq \frac{10}{3}$$

Dimostrare che  $0 \leq w, x, y, z \leq \frac{\pi}{6}$

3. Esiste un intero  $k$  tale che, per ogni coppia di interi  $(a, b)$  con  $a + b = \frac{k}{2}$ , esattamente uno tra  $a$  e  $b$  si può scrivere nella forma  $19m + 85n$  per opportuni interi positivi  $m, n$ ?
4. In una stanza ci sono 1985 persone. Ciascuna parla al più 5 lingue. Comunque prese 3 persone, ce ne sono almeno 2 con una lingua in comune. Dimostrare che c'è una lingua parlata da almeno 200 persone.

### Balkan 1986

1. Una retta che passa per l'incentro di un triangolo, interseca la circonferenza inscritta e circoscritta nei punti  $A, B, C, D$  (in questo ordine). Dimostrare che  $AB \cdot CD \geq \frac{BC^2}{4}$

2. Su ciascun spigolo di un tetraedro si sceglie un punto. Il prodotto delle distanze da ciascun punto agli estremi del suo spigolo è costante. Dimostrare che esiste una sfera che passa per questi 6 punti.
3. Siano  $r, s$  interi diversi da 0 e  $k$  un reale positivo. La sequenza  $a_n$  è definita da:

$$\begin{aligned} a_1 &= r \\ a_2 &= s \\ a_{n+2} &= \frac{a_{n+1}^2 + k}{a_n} \end{aligned}$$

Dimostrare che tutti i termini della sequenza sono interi se e soltanto se  $\frac{r^2+s^2+k}{rs}$  è intero.

4. Un punto  $P$  interno al triangolo  $ABC$  è tale che  $PAB, PBC, PCA$  hanno la stessa area e lo stesso perimetro. Dimostrare che  $ABC$  è equilatero. Se  $P$  è esterno ad  $ABC$ , dimostrare che  $ABC$  è rettangolo.

## Balkan 1987

1.  $f$  è una funzione definita sui reali a valori reali che soddisfa:
  - $f(0) = \frac{1}{2}$
  - esiste un reale  $a$  tale che, per ogni  $x, y$  abbiamo  $f(x+y) = f(x)f(a-y) + f(y)f(a-x)$

Dimostrare che  $f$  è costante.

2. Trovare tutti i reali  $x \geq y \geq 1$  tali che  $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}$  e  $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}$  sono interi consecutivi.
3.  $ABC$  è un triangolo con  $BC = 1$  e che soddisfa:

$$\frac{(\sin \frac{A}{2})^{23}}{(\cos \frac{A}{2})^{48}} = \frac{(\sin \frac{B}{2})^{23}}{(\cos \frac{B}{2})^{48}}$$

Trovare  $AC$ .

4. Due circonferenze hanno i centri che distano 2 e i raggi che misurano 1 e  $\sqrt{2}$ .  $X$  è un punto su entrambe le circonferenze.  $M$  sta sulla circonferenza più piccola,  $Y$  sta su quella più grande ed  $M$  è il punto medio di  $XY$ . Trovare la distanza  $XY$ .

## Balkan 1988

1.  $ABC$  è un triangolo di area 1.  $AH$  è un'altezza,  $M$  è il punto medio di  $BC$  e  $K$  è l'intersezione tra la bisettrice di  $A$  e il segmento  $BC$ . L'area del triangolo  $AHM$  è  $\frac{1}{4}$  e l'area di  $AKM$  è  $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Trovare gli angoli di  $ABC$ .

2. Trovare tutti i polinomi a coefficienti reali a due variabili  $p(x, y)$  tali che, per ogni  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$  si ha  $p(x, y)p(u, v) = p(xu + yv, xv + yu)$ .
3. La somma dei quadrati degli spigoli di un tetraedro è  $S$ . Dimostrare che esistono due piani paralleli a distanza  $\sqrt{\frac{S}{12}}$  al cui interno è il tetraedro.
4.  $x_n$  è la sequenza  $51, 53, 57, 65, \dots, 2n + 49, \dots$ . Trovare tutti gli  $n$  tali che  $x_n$  e  $x_{n+1}$  sono ciascuno il prodotto di due (e solo due) primi distinti con la stessa differenza. Cioè,  $x_n = p_1 p_2, x_{n+1} = q_1 q_2, p_1 - p_2 = q_1 - q_2 \neq 0$  con  $p_1, p_2, q_1, q_2$  primi.

## Balkan 1989

1. Trovare tutti gli interi che sono la somma dei quadrati dei loro quattro più piccoli divisori positivi.
2. Un primo  $p$  ha le cifre decimali  $p_n p_{n-1} \dots p_0$  con  $p_n > 1$ . Dimostrare che il polinomio  $p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x + p_0$  non si scompone nei polinomi a coefficienti interi.
3. Il triangolo  $ABC$  ha area 1. I punti  $X \in AB$  ed  $Y \in AC$  sono tali che il baricentro giace dalla parte opposta di  $B$  e  $C$  rispetto alla retta  $XY$ . Dimostrare che

$$\text{area}(BXGY) + \text{area}(CYGX) \geq \frac{4}{9}$$

Quando si ha l'uguaglianza?

4.  $S$  è un insieme di sottoinsiemi di  $\{1, 2, \dots, n\}$ , ciascuno con 3 elementi. Comunque presi due elementi distinti di  $S$ , questi hanno al più un elemento in comune. Dimostrare che  $S$  ha al più  $\frac{n(n-1)}{6}$  elementi. Trovare un insieme  $S$  con  $\frac{n(n-4)}{6}$  elementi.

## Balkan 1990

1. La sequenza  $u_n$  è definita da  $u_1 = 1, u_2 = 3, u_{n+2} = (n+3)u_{n+1} - (n+2)u_n$ . Quali termini della sequenza sono multipli di 11?
2. Sia  $P(x) = (x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n)^2$ . Dimostrare che la somma dei coefficienti di  $P$  da  $x^{n+1}$  a  $x^{2n}$  è

$$\frac{n(n+1)(5n^2 + 5n + 2)}{24}$$

3. I piedi delle altezze del triangolo  $ABC$  sono  $D, E, F$ . L'incirchio di  $DEF$  è tangente ai suoi lati in  $G, H, I$ . Dimostrare che  $ABC$  e  $GHI$  hanno la stessa retta di Eulero (la retta che passa per circocentro, baricentro e ortocentro).
4. La funzione  $f$  è definita sugli interi positivi e, se  $m - n$  è primo,  $f(m) \neq f(n)$ . Qual è la dimensione minima dell'immagine di  $f$ ?

## Balkan 1991

1.  $O$  è il circocentro del triangolo acuto  $ABC$ .  $M$  è un punto sull'arco  $AB$  (quello minore). La retta per  $M$  perpendicolare ad  $OA$  interseca  $AB$  in  $K$  e  $AC$  in  $L$ . La retta per  $M$  perpendicolare ad  $OB$  interseca  $AB$  in  $N$  e  $BC$  in  $P$ .  $MN = KL$ . Trovare l'angolo  $\angle MLP$  in funzione degli angoli  $A, B, C$ .
2. Trovare un insieme infinito di triangoli, a due a due non congruenti la cui area è un intero, i cui lati sono interi a due a due coprimi, le cui altezze non sono mai intere.
3. Un esagono regolare ha area  $H$  e i suoi vertici sono sul perimetro di un poligono convesso di area  $A$ . Dimostrare che  $2A \leq 3H$ . Quando si ha l'uguaglianza?
4.  $A$  è l'insieme degli interi positivi e  $B = A \cup \{0\}$ . Dimostrare che non esiste una funzione biunivoca  $f : A \rightarrow B$  tale che  $f(mn) = f(m) + f(n) + 3f(m)f(n)$  per ogni  $m, n \in A$ .

## Balkan 1992

1. Sia  $a(n) = 3^{4n}$ . Per quali  $n$   $m^{a(n)+6} - m^{a(n)+4} - m^5 + m^3$  è sempre divisibile per 1992?
2. Dimostrare che per ogni intero positivo  $n$ :
$$(2n^2 + 3n + 1)^n \geq 6^n n! n!$$
3.  $ABC$  è un triangolo di area 1. Prendiamo  $D$  su  $BC$ ,  $E$  su  $CA$ ,  $F$  su  $AB$  in modo che  $AFDE$  sia ciclico. Dimostrare che  $\text{area}(DEF) \leq \frac{EF^2}{4AD^2}$ .
4. Per ogni  $n \geq 3$  trovare il minimo  $f(n)$  tale che, per ogni sottoinsieme di  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  con  $f(n)$  elementi, ci sono almeno 3 elementi a due a due relativamente primi.

## Balkan 1993

1. I reali  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq a_6$  soddisfano:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 10$$

$$(a_1 - 1)^2 + (a_2 - 1)^2 + (a_3 - 1)^2 + (a_4 - 1)^2 + (a_5 - 1)^2 + (a_6 - 1)^2 = 6$$

Qual è il massimo valore per  $a_6$ ?

2. Quanti interi non negativi, con al più 1993 cifre decimali, hanno le cifre non decrescenti? Ad esempio, 55677 va bene mentre 54 no.
3. Due circonferenze con centri  $A$  e  $B$  sono esternamente tangenti in  $X$ . Un'altra circonferenza  $C$  le contiene entrambe, e le tangente in  $Y$  e  $Z$  rispettivamente. La tangente comune delle prime due circonferenze forma una corda della terza, con punto medio  $M$ . Dimostrare che  $\angle YMZ = \angle ACB$ .

4.  $p$  è un primo e  $k$  è un intero positivo  $\geq 2$ . Dimostrare che possiamo trovare interi positivi  $(m, n) \neq (1, 1)$  tali che  $\frac{m^p+n^p}{2} = \left(\frac{m+n}{2}\right)^k$  se e soltanto se  $k = p$ .

## Balkan 1994

1. Dato un punto  $P$  interno ad un angolo acuto  $XAY$ , mostrare una costruzione per una linea attraverso  $P$ , che incontra  $AX$  in  $B$  e  $AY$  in  $C$ , tale che l'area di  $ABC$  è  $AP^2$ .
2. Dimostrare che  $x^4 - 1993x^3 + (1993 + n)x^2 - 11x + n = 0$  ha al massimo una radice intera, se  $n$  è un intero.
3. Qual è il valore massimo  $f(n)$  di  $|s_1 - s_2| + |s_2 - s_3| + \dots + |s_{n-1} - s_n|$  al variare di  $s_1, s_2, \dots, s_n$  tra tutte le permutazioni di  $1, 2, \dots, n$ ?
4. Trovare il minimo  $n \geq 5$  tale che possiamo trovare un grafo con  $n$  punti, senza triangoli, e tale che per ogni coppia di vertici  $A, B$  non collegata da un arco, esistono esattamente 2 punti collegati a entrambi.

## Balkan 1995

1. Definiamo la successione  $a_n$  con:

$$a_3 = \frac{2+3}{1+6}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + n}{1 + na_{n-1}}$$

Trovare  $a_{1995}$ .

2. Due circonferenze, con centri  $O$  e  $O'$  si intersecano in  $A$  e  $B$  ed  $OA$  è perpendicolare a  $O'A$ .  $OO'$  interseca le circonferenze nei punti  $C, E, D, F$  in modo che  $C, O, E, D, O', F$  stanno sulla linea in quest'ordine.  $BE$  interseca di nuovo la circonferenza in  $K$  e interseca  $CA$  in  $M$ .  $BD$  interseca la circonferenza di nuovo in  $L$  e  $AF$  in  $N$ . Dimostrare che

$$\frac{KE}{KM} \frac{LN}{LD} = \frac{O'E}{OD}$$

3.  $m, n$  sono interi positivi con  $m > n$  e  $m + n$  pari. Dimostrare che le radici di

$$x^2 - (m^2 - m + 1)(x - n^2 - 1) - (n^2 + 1)^2 = 0$$

sono interi positivi, ma non quadrati perfetti.

4. Sia  $S$  una griglia  $n \times n$  di punti a coordinate intere. Sia  $T$  l'insieme di tutti i sottoinsiemi di  $S$  con 4 elementi che formano un quadrato. Siano  $A, B, C$  rispettivamente il numero di coppie  $\{P, Q\}$  di punti di  $S$  che appartengono a 0, esattamente 2, esattamente 3 elementi di  $T$ . Dimostrare che  $A = B + 2C$ . (Notare che  $PQ$  potrebbe essere anche un lato o una diagonale del quadrato.)

## Balkan 1996

1. Sia  $d$  la distanza tra circocentro e baricentro di un triangolo. Sia  $R$  il circoraggio e  $r$  l'inraggio. Dimostrare che:

$$d^2 \leq R(R - 2r)$$

2.  $p > 5$  è un primo.  $A = \{p - n^2, \text{ dove } n^2 < p\}$ . Dimostrare che possiamo trovare due interi  $a, b \in A$  tali che  $a > 1$  e  $a$  divide  $b$ .
3. In un pentagono convesso, consideriamo le 5 rette che collegano ciascun vertice al punto medio del lato opposto. Dimostrare che se 4 di queste rette concorrono, allora tutte e 5 concorrono.
4. Dimostrare se esiste un sottoinsieme  $X$  di  $\{1, 2, 3, \dots, 2^{1996} - 1\}$  con al più 2012 elementi tale che:
  - $1 \in X$
  - $2^{1996} - 1 \in X$
  - ogni elemento di  $X$  diverso da 1 è somma di due elementi distinti di  $X$  o il doppio di un elemento di  $X$

## Balkan 1997

1.  $ABCD$  è un quadrilatero convesso.  $X$  è un punto al suo interno.  $XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2$  è il doppio dell'area del quadrilatero. Dimostrare che è un quadrato e che  $X$  è il suo centro.
2. Un insieme  $A$  di sottoinsiemi di  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  ha la proprietà che, comunque presi due elementi di  $X$ , esiste un elemento di  $A$  che contiene esattamente uno dei due. Dimostrare che  $2|A| \geq n$
3. Due circonferenze  $A$  e  $B$  si tangono esternamente in  $T$ . Una terza circonferenza  $C$  le contiene entrambe e le tange in  $X$  ed  $Y$ , rispettivamente. La tangente comune di  $A$  e  $B$  passante per  $T$  interseca  $C$  in  $S$ .  $SX$  interseca  $A$  in  $P$  e  $XY$  interseca di nuovo  $A$  in  $Q$ .  $SY$  interseca  $B$  in  $U$  e  $XY$  interseca di nuovo  $B$  in  $V$ . Dimostrare che  $ST, PQ, UV$  concorrono.
4. Trovare tutte le funzioni reali a varlori reali che soddisfano:

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$$

per ogni  $x, y \in \mathbb{R}$ .

## Balkan 1998

1. Sia  $f : \{1, 2, 3, \dots, 1997\} \rightarrow \mathbb{N}$  definita come  $f(n) = \left\lfloor \frac{n^2}{1998} \right\rfloor$ . Determinare le dimensioni dell'immagine di  $f$ .

2.  $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$  sono reali positivi che soddisfano  $x_1 < x_2 < \dots < x_{2n+1}$ .  
Dimostrare che

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots - x_{2n} + x_{2n+1} < \sqrt[n]{x_1^n - x_2^n + x_3^n - x_4^n + \dots - x_{2n}^n + x_{2n+1}^n}$$

3. Sia  $S$  l'insieme dei punti di un triangolo (al suo interno o sul perimetro).  
Sia  $T$  l'insieme  $S$ , meno un punto all'interno. Dimostrare che esiste un insieme di segmenti (non punti), a due a due disgiunti, la cui unione è  $T$ .
4. Dimostrare che la seguente equazione non ha soluzioni negli interi:

$$m^2 = n^5 - 4$$

## Balkan 1999

- $O$  è il circocentro del triangolo  $ABC$ .  $XY$  è il diametro della circonferenza circoscritta perpendicolare a  $BC$ .  $M$  è il punto medio di  $BC$ .  $X$  è più vicino a  $M$  che  $Y$ .  $Z$  è il simmetrico di  $X$  rispetto a  $M$ .  $W$  è il punto medio di  $AZ$ . Dimostrare che  $W$  appartiene alla circonferenza passante per i punti medi di  $ABC$ . Dimostrare che  $MW$  è perpendicolare ad  $AY$ .
- $p$  è un primo dispari congruo a 2 modulo 3. Dimostrare che gli elementi divisibili per  $p$  dell'insieme  $\{m^2 - n^3 - 1 : 0 < m, n < p\}$  sono al più  $p - 1$ .
- $ABC$  è un triangolo acuto di area 1. Dimostrare che il triangolo avente per vertici le proiezioni del baricentro di  $ABC$  sui lati ha l'area compresa tra  $\frac{4}{27}$  e  $\frac{1}{4}$ .
- $0 = a_0, a_1, a_2, \dots$  è una successione non decrescente e non limitata di interi non negativi.  $b_n$  è il numero di elementi della sequenza minori o uguali a  $n$ . Dimostrare che

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_m)(b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_n) \geq (m + 1)(n + 1)$$

## Balkan 2000

1. Trovare tutte le funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfano:

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

- $ABC$  è un triangolo acuto, non isoscele.  $M$  è il punto medio di  $BC$ .  $X$  è un punto sul segmento  $AM$ .  $Y$  è la proiezione di  $X$  su  $BC$ .  $Z$  è un punto sul segmento  $XY$ .  $U$  e  $V$  sono le proiezioni di  $Z$  su  $AB$  e  $AC$ . Dimostrare che le bisettrici degli angoli  $\angle UZV$  e  $\angle UXV$  sono parallele.
- Quant'è il numero massimo di rettangoli  $1 \times 10\sqrt{2}$  che si possono ritagliare da un rettangolo  $50 \times 90$ , facendo tagli paralleli ai lati?

4. Dimostrare che per ogni  $n$  possiamo trovare un insieme  $X$  di  $n$  interi distinti maggiori di 1 tale che, per ogni sottoinsieme di  $X$ , la media dei suoi elementi è un quadrato, un cubo o una potenza più alta.

## Balkan 2001

1. Se  $2^n - 1 = ab$  e  $2^k$  è la massima potenza di 2 che divide  $2^n - 2 + a - b$ , allora  $k$  è pari.
2. Un pentagono convesso ha gli angoli uguali e i lati di misura razionale. Dimostrare che è regolare.
3.  $a, b, c$  sono reali positivi tali che  $abc \leq a + b + c$ . Dimostrare che

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc$$

4. Un cubo di lato 3 è diviso in 27 cubi unitari. I cubi unitari sono etichettati a caso da 1 a 27. Una mossa consiste nello scambiare il cubo 27 con uno dei suoi vicini. È possibile trovare una sequenza finita di mosse che alla fine lasciano il cubo 27 nella sua posizione originale, ma il cubo  $n$  è dove prima c'era  $27 - n$  (per ogni  $n = 1, 2, \dots, 26$ )?

## Balkan 2002

1. Dimostrare che un grafo finito in cui ogni vertice ha almeno 3 archi contiene un ciclo pari.
2. La sequenza  $a_n$  è definita da  $a_1 = 20$ ,  $a_2 = 30$ ,  $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$ . Trovare tutti gli  $n$  per cui  $5a_{n+1}a_n + 1$  è un quadrato.
3. Due circonferenze di raggio diverso si intersecano in  $A$  e  $B$ . Le due tangenti comuni toccano una circonferenza in  $P, Q$  e l'altra in  $R, S$ . Dimostrare che gli ortocentri di  $APQ, BPQ, ARS, BRS$  formano un rettangolo.
4.  $\mathbb{Z}^+$  è l'insieme degli interi positivi. Trovare tutte le funzioni  $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  tali che per ogni  $n \in \mathbb{Z}^+$  si ha  $f(f(n)) + f(n) = 2n + 2001$  o  $f(f(n)) + f(n) = 2n + 2002$ .

## Balkan 2003

1. Esiste un insieme di 4004 interi positivi tale che la somma di ogni sottoinsieme con 2003 elementi non è divisibile per 2003?
2.  $ABC$  è un triangolo. La tangente alla circonferenza circoscritta passante per  $A$  interseca  $BC$  in  $D$ . La perpendicolare a  $BC$  per  $B$  interseca l'asse di  $AB$  in  $E$ , la perpendicolare a  $BC$  per  $C$  interseca l'asse di  $AC$  in  $F$ . Dimostrare che  $D, E, F$  sono allineati.
3. Trovare tutte le funzioni  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che, per ogni  $x, y$  razionali:

$$\bullet f(x + y) - yf(x) - xf(y) = f(x)f(y) - x - y + xy$$

- $f(x) = 2f(x+1) + 2 + x$
- $f(1) + 1 > 0$

4. Un rettangolo  $ABCD$  ha le lunghezze dei lati  $AB = m, AD = n$ , con  $m, n$  interi dispari relativamente primi. È diviso in quadrati unitari e la diagonale  $AC$  interseca i lati dei quadrati unitari nei punti  $A = A_1, A_2, A_3, \dots, A_k = C$ . Dimostrare che:

$$A_1A_2 - A_2A_3 + A_3A_4 - \dots \pm A_{k-1}A_k = \frac{AC}{mn}$$

## Balkan 2004

1. La sequenza  $a_n, n \geq 0$  di reali soddisfa la relazione:

$$a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$$

per tutti gli interi non negativi  $m, n$  con  $m \geq n$ . Se  $a_1 = 3$ , trovare  $a_{2004}$ .

2. Trovare tutte le coppie di numeri primi  $x, y$  tali che  $x^y - y^x = xy^2 - 19$ .
3. Sia  $O$  un punto interno a un triangolo acutangolo  $ABC$ . Le circonferenze con centri nei punti medi dei lati passanti per  $O$  si intersecano a due a due nei punti  $O, K, L, M$ . Dimostrare che  $O$  è l'incentro di  $KLM$  se e soltanto se  $O$  è il circocentro di  $ABC$ .
4. Un numero finito di rette, a 3 a 3 non concorrenti, partizionano il piano in regioni. Due regioni sono "vicine" se l'intersezione del loro bordo è un segmento, una semiretta o una retta (un punto non è un segmento). Ad ogni regione è assegnato un intero in modo che:
- Il prodotto degli interi assegnati a due regioni vicine è minore della loro somma
  - Per ogni retta, per ciascuno dei due semipiani determinati da quella retta, la somma degli interi assegnati alle regioni di quel semipiano è 0.

Dimostrare che questo è possibile se e soltanto se non tutte le rette sono parallele.

## Balkan 2005

1.  $ABC$  è un triangolo acutangolo; la circonferenza inscritta è tangente ad  $AB, AC$  in  $D$  ed  $E$ , rispettivamente. Siano  $X$  ed  $Y$  le intersezioni tra  $DE$  e le bisettrici degli angoli  $\angle ABC, \angle ACB$ . Sia  $Z$  il punto medio di  $BC$ . Dimostrare che  $XYZ$  è equilatero se e soltanto se  $\angle A = 60$
2. Trovare tutti i primi  $p$  tali che  $p^2 - p + 1$  è un cubo perfetto.

3. Siano  $a, b, c$  reali positivi. Dimostrare che:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \frac{2(a-b)^2}{a+b+c}$$

Quando vale l'uguaglianza?

4. Sia  $n \geq 2$  un intero. Sia  $S$  un sottoinsieme di  $\{1, 2, \dots, n\}$  che non contiene due elementi uno multiplo dell'altro e non contiene due elementi relativamente primi. Qual è il massimo numero di elementi di  $S$ ?

## Balkan 2006

1. Siano  $a, b, c$  reali positivi. Dimostrare che:

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}$$

2. Sia  $ABC$  un triangolo ed  $m$  una retta che interseca i segmenti  $AB, AC$  nei punti interni  $D, F$  rispettivamente, e interseca  $BC$  nel punto  $E$  tale che  $C$  sta tra  $B$  ed  $E$ . Le parallele ad  $m$  per  $A, B, C$  intersecano la circonferenza circoscritta ad  $ABC$  nei punti  $A_1, B_1, C_1$ , rispettivamente ( $A_1, B_1, C_1$  sono diversi da  $A, B, C$ ). Dimostrare che le rette  $A_1E, B_1F, C_1D$  concorrono.
3. Trovare tutte le triple di razionali positivi  $m, n, p$  tali che i numeri

$$m + \frac{1}{np}, n + \frac{1}{pm}, p + \frac{1}{mn}$$

sono tutti interi.

4. Sia  $m$  un intero positivo e  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  una sequenza di interi data da  $a_0 = a \in \mathbb{N}$  e

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & \text{se } a_n \text{ è pari} \\ a_n + m & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Trovare tutti gli  $a$  tali che la sequenza è periodica (partendo dall'inizio).

## Balkan 2007

1. Sia  $ABCD$  un quadrilatero convesso con  $AB = BC = CD$ ,  $AC \neq BD$  e sia  $E$  l'intersezione delle sue diagonali. Dimostrare che  $AE = DE$  se e soltanto se  $\angle BAD + \angle ADC = 120$

2. Trovare tutte le funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che:

$$f(f(x) + y) = f(f(x) - y) + 4f(x)y$$

per ogni  $x, y \in \mathbb{R}$

3. Trovare tutti gli interi positivi  $n$  per cui esiste una permutazione  $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  per cui

$$\sqrt{\sigma(1) + \sqrt{\sigma(2) + \sqrt{\dots + \sqrt{\sigma(n)}}}}$$

è un numero razionale.

4. Dato un intero positivo  $n \geq 3$ , siano  $C_1, C_2, C_3$  i bordi di tre  $n$ -agoni convessi nel piano tali che  $C_1 \cap C_2, C_2 \cap C_3, C_3 \cap C_1$  sono insiemi finiti. Trovare il massimo numero di elementi che può avere  $C_1 \cap C_2 \cap C_3$ .