Testi dei problemi assegnati alle Olimpiadi Internazionali della Matematica (1959 - 2007)

Tradotti da me

10 settembre 2007

IMO 1959

1. Dimostrare che
$$\frac{21n+4}{14n+3}$$
è irriducibile per ogni $n \in \mathbb{N}$

2. Trovare le soluzioni reali di
$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=A$$
con i seguenti valori di A:
   - $A=\sqrt{2}$
   - $A=1$
   - $A=2$

   escludendo i valori di x per cui una radice perde significato.

3. Siano a, b, c numeri reali. Data l'equazione quadratica in $\cos x$:
$$a(\cos x)^2 + b\cos x + c = 0$$
Usando a, b, c, costruire un'equazione quadratica in $\cos 2x$ con le stesse radici dell'equazione originale.

   Confrontare le due equazioni ottenute per $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$.

4. Data la lunghezza di AC, costruire un triangolo ABC con l'angolo $\angle ABC$ retto e la mediana BM che soddisfa $BM^2 = AB \cdot BC$.

5. Dato un punto M all'interno del segmento AB, si costruiscano i quadrati $AMCD$ e $MBEF$ dalla stessa parte di AB. Le circonferenze circoscritte a questi quadrati, con centri P e Q, si intersecano in M e N.
   - dimostrare che AF e BC si intersecano in N
   - dimostrare che, al variare di M sul segmento AB, le rette MN passano per un punto fisso S

- trovare il luogo dei punti medi dei segmenti PQ al variare di M

6. I piani P e Q sono incidenti. Il punto A appartiene a P ma non a Q e il punto C appartiene a Q ma non a P. Costruire due punti $B \in P, D \in Q$ tali che il quadrilatero $ABCD$ soddisfa le seguenti condizioni:

   - giace su un piano
   - è convesso con i vertici in ordine A, B, C, D
   - AB è parallela a CD
   - $AD = BC$, ma AD non è parallela a BC
   - esiste una circonferenza inscritta ad $ABCD$, tangente ad ogni lato.

IMO 1960

1. Trovare tutti interi di 3 cifre N divisibili per 11, tali che $\frac{N}{11}$ è la somma dei quadrati delle cifre decimali di N.

2. Trovare tutti i numeri reali x per cui vale la seguente disuguaglianza:
$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9$$

3. In un triangolo rettangolo BC, l'ipotenusa BC, di lunghezza a, è divisa in n parti uguali, dove n è un intero positivo dispari. Se MN è la parte centrale, chiamiamo $\angle MAN = \alpha$. h è la lunghezza dell'altezza uscente da A. Dimostrare che:
$$\tan\alpha = \frac{4nh}{an^2-a}$$

4. Costruire un triangolo ABC, date le lunghezze delle mediane uscenti da A e B e la lunghezza della mediana da A.

5. Il cubo $ABCDA'B'C'D'$ ha A sopraa A', B sopra B', C sopra C', D sopra D'. X è un qualsiasi punto su AC (diagonale della faccia $ABCD$) e Y un punto su $B'D'$ (diagonale della faccia $A'B'C'D'$).
   - trovare il luogo dei punti medi di XY
   - trovare il luogo dei punti Z che si trovano a $\frac{1}{3}$ del segmento XY, cioè tali che $ZY = 2XZ$

6. Un cono (dato dalla rotazione di un triangolo rettangolo su in cateto) ha una sfera inscritta, tangente alla base e alla superficie laterale. Un cilindro è circoscritto alla sfera, e la sua base è interna alla base del cono. Il volume del cono è V_1 e il volume del cilindro è V_2.
   - dimostrare che $V_1 \neq V_2$
   - trovare il più piccolo valore possibile di $\frac{V_1}{V_2}$. Qual'è l'angolo tra l'asse del cono e una retta, giagente sulla sua superficie, passante per il vertice?

7. Nel quadrilatero $ABCD$, AB è parallela a DC e $BC = AD$. Sia $AB = a$, $CD = c$, e h la distanza da A a CD. Mostrare come costruire tutti i punti X sull'asse di simmetria del quadrilatero, tali che $\angle BXC = \angle AXD = 90$. Trovare le distanze di ogni X da AB e CD. Qual'è la condizione di esistenza di tali punti?

IMO 1961

1. Risolvere questo sistema di equazioni in x, y, z:

$$x + y + z = a$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2$$

$$xy = z^2$$

Che condizione devono soddisfare a, b perchè x, y, z siano reali positivi distinti?

2. Siano a, b, c i lati di un triangolo e A la sua area. Dimostrare che:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}A$$

Quando abbiamo l'uguaglianza?

3. Risolvere l'equazione $\cos^n x - \sin^n x = 1$, dove n è un intero positivo.

4. P è interno al triangolo ABC. PA interseca BC in D, PB interseca AC in E, PC interseca AB in F. Dimostrare che almeno un valore tra $\frac{AP}{PD}, \frac{BP}{PE}, \frac{CP}{PF}$ è minore o uguale a 2, e almeno una è maggiore o uguale a 2.

5. Si vuole costruire un triangolo ABC date le lunghezze $AC = b$, $AB = c$ e l'angolo acuto $\angle AMB = \alpha$, dove M è il punto medio di BC. Dimostrare che la costruzione è possibile se e soltanto se:

$$b \tan \frac{\alpha}{2} \leq c < b$$

Quando vale l'uguaglianza?

6. Dati tre punti non allineati A, B, C e un piano p non parallelo ad ABC tale che A, B, C sono dalla stessa parte di p. Si prendono tre punti A', B', C' su p. Siano A'', B'', C'' i punti medi di AA', BB', CC', e O il baricentro di $A''B''C''$. Qual'è il luogo degli O al variare di A', B', C'?

IMO 1962

1. Trovare il più piccolo intero positivo n tale che la sua ultima cifra è 6, e che spostando quel 6 all'inizio del numero (esempio: $496 \to 649$), otteniamo $4n$.

2. Trovare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che:
$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

3. Il cubo $ABCDA'B'C'D'$ ha $ABCD$ come faccia superiore e $A'B'C'D'$ come faccia inferiore, con A sopra A' e così via. Il punto X si muove a velocità costante lungo il perimetro di $ABCD$, e il punto Y si muove alla stessa velocità lungo il perimetro di $B'C'CB$. X lascia A per andare verso B nello stesso momento in cui Y lascia B' verso C'. Che luogo descrivono i punti medi di XY?

4. Trovare tutte le soluzioni reali a
$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$$

5. Dati tre punti distinti A, B, C su una circonferenza K, costruire un punto D su K tale che esiste una circonferenza inscritta ad $ABCD$.

6. Il raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo iscoscele è R ed il raggio del suo cerchio inscritto è r. Sia d la distanza tra circocentro e incentro. Dimostrare che:
$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

7. Dimostrare che ogni tetraedro regolare ha cinque sfere distinte, ciascuna tangente ai prolungamenti dei sei spigoli. Dimostrare anche che vale l'inverso, cioè ogni tetraedro per cui esistono queste cinque sfere è regolare.

IMO 1963

1. Per quali valori di p la seguente equazione ha soluzioni reali? Quali soluzioni?
$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x$$

2. Dato un punto A e un segmento BC, trovare tutti i punti P dello spazio tali che esiste un punto X sul segmento BC per cui $\angle APX = 90$.

3. Un n-agono le cui lunghezze dei lati consecutivi sono $a_1, a_2, \ldots, a_n$ è tale che:
   - tutti gli angoli sono uguali
   - $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$

   Dimostrare che tutti i lati sono uguali.

4. Trovare tutte le soluzioni $x_1, \ldots, x_5 \in \mathbb{R}$ al sistema di equazioni:
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= yx_2 \\ x_2 + x_4 &= yx_3 \\ x_3 + x_5 &= yx_4 \\ x_4 + x_1 &= yx_5 \\ x_5 + x_2 &= yx_1 \end{aligned}$$

   dove y è un parametro reale.

5. Dimostrare che
$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$$

6. Cinque studenti A, B, C, D, E si sono posizionati $1, 2, 3, 4, 5$ in una gara senza pareggi. Qualcuno predisse che il risultato sarebbe stato l'ordine A, B, C, D, E. Ma nessun studente arrivò nella posizione predetta, e quando due studenti avrebbero dovuto arrivare consecutivamente (sempre secondo la previsione), non lo hanno fatto. Per esempio, C e D non sono arrivati nè $1, 2$ (rispettivamente), nè $2, 3$, nè $3, 4$ e nemmeno $4, 5$.

   Un'altra previsione fu l'ordine D, A, E, C, B. Esattamente due studenti arrivarono nella posizione predetta, e due coppie disgiunte che sarebbero dovute arrivare consecutivamente, lo hanno fatto.

   Determinare il risultato.

IMO 1964

1.
    - Trovare tutti i numeri naturali n tali che $2^n - 1$ è un multiplo di 7.
    - Dimostrare che non c'è nessun naturale n tale che 2^n+1 è un multiplo di 7.

2. $a, b, c \in \mathbb{R}$ sono le lunghezze dei lati di un triangolo. Dimostrare che:

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc$$

3. Il triangolo ABC ha lati a, b, c. Da ciascun lato, si costruisce una parallela tangente alla circonferenza inscritta. Ognuna di queste tangenti forma un triangolo con gli altri due lati, e un cerchio è inscritto a ciascuno di questi tre triangoli. Calcolare l'area totale di tutti e quattro i cerchi inscritti.

4. Tra 17 persone, ciascuna coppia si scambia lettere su un argomento. Gli argomenti totali di cui si discute sono 3. Dimostrare che esistono almeno 3 persone che si scrivono sullo stesso argomento.

   In altre parole, se coloriamo con 3 colori tutti gli archi del grafo completo di 17 vertici, possiamo trovare un triangolo con tutti i lati dello stesso colore.

5. In un piano si trovano 5 punti tali che, tra tutte le linee che ne congiungono due, non ce ne sono due coincidenti, parallele o perpendicolari. Da ogni punto si tracciano le perpendicolari a ciascuna delle line che collegano 2 dei restanti 4 punti. Qual'è il massimo di punti di intersezione che queste perpendicolari possono formare tra loro?

6. $ABCD$ è un tetraedro e D_0 è il baricentro di ABC. Si disegnano le parallele a DD_0 attraverso A, B, C, che incontrano i piani BCD, CAD, ABD rispettivamente in A_0, B_0, C_0. Dimostrare che il volume di $ABCD$ è un terzo del volume di $A_0B_0C_0D_0$. Questo risultato è ancora vero se D_0 è un punto arbitrario interno ad ABC?

IMO 1965

1. Trovare tutti gli x nell'intervallo $[0, 2\pi]$ che soddisfano:

$$2\cos x \leq |\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x} \leq \sqrt{2}$$

2. Nel seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

   i coefficienti a_{ij} soddisfano queste condizioni:

   - a_{11}, a_{22}, a_{33} sono positivi
   - gli altri a_{ij} sono negativi
   - in ogni equazione, la somma dei coefficienti è positiva

   Dimostrare che l'unica soluzione è $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

3. Il tetraedro $ABCD$ è diviso in due parti da un piano parallelo ad AB e a CD. La distanza di questo piano da AB è k volte la distanza da CD. Trovare il rapporto tra i volumi delle due parti.

4. Trovare tutti gli insiemi di 4 numeri reali a, b, c, d tali che:

$$\begin{aligned} a + bcd &= 2 \\ b + cda &= 2 \\ c + dab &= 2 \\ d + abc &= 2 \end{aligned}$$

   FIXME! (Togliere la numerazione delle righe agli align*!)

5. Nel triangolo OAB, l'angolo in O è acuto. M ‘e un punto arbitrario su AB. P e Q sono le proiezioni di M su OA e OB, rispettivamente. Qual è il luugo degli ortocentri di OPQ al variare di M su AB? E se M varia in tutto l'interno di OAB?

6. Dati $n \geq 3$ punti del piano, dimostrare che ci sono al massimo n coppie di punti la cui distanza è massima.

IMO 1966

1. In una gara matematica, sono si assegnano i problemi A, C, B. 25 studenti hanno risolto almeno uno dei tre. Tra quelli che non hanno risolto A, quelli che hanno risolto B sono il doppio o di più di quelli che hanno risolto C. Quelli che hanno risolto solo A sono stati esattamente uno pi più di quelli che hanno risolto A e almeno un altro problema. Inoltre, il numero di studenti che ha risolto solo A è la somma del numero di studenti che hanno risolto solo B e di quelli che hanno risolto solo C.

   Quanti hanno risolto soltanto B?

2. Dimostrare che se il triangolo ABC soddisfa:

   $$BC + AC = \tan \frac{C}{2}(BC \tan A + AC \tan B)$$

   allora è isoscele.

3. Dato un tetraedro regolare $ABCD$, P è il punto che minimizza la somma:

   $$PA + PB + PC + PD$$

   Dimostrare che P è il centro del tetraedro.

4. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$:

   $$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$$

   (ovviamente escludendo i valori di x per cui un denominatore si annulla)

5. Risolvere il sistema di equazioni:

   $$\begin{aligned}
   |a_1 - a_1|x_1 + |a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 = 1 \\
   |a_2 - a_1|x_1 + |a_2 - a_2|x_2 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 = 1 \\
   |a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_2 + |a_3 - a_3|x_3 + |a_3 - a_4|x_4 = 1 \\
   |a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_2 + |a_4 - a_3|x_3 + |a_4 - a_4|x_4 = 1
   \end{aligned}$$

   dove a_1, a_2, a_3, a_4 sono reali distinti.

6. Si prendano tre punti K, L, M sui lati BC, CA, AB del triangolo ABC. Dimostrare che almeno uno dei triangoli AML, BKM, CLK ha area minore o uguale di $1/4$ dell'area di ABC.

IMO 1967

1. Il parellelogramma $ABCD$ ha $AB = a, AD = 1, \angle BAD = \alpha$, e il triangolo ABD ha tutti gli angoli acuti.

   Dimostrare che i quattro cerchi di raggio 1 e con centri in A, B, C, D ricoprono il parallelogramma se e soltanto se:

$$a \leq \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$$

2. Tra i sei spigoli di un tetraedro, solo uno ha lunghezza maggiore di 1. Dimostrare che il volume del tetraedro è minore o uguale a $\frac{1}{8}$.

3. Siano k, m, n numeri naturali tali che $m + k + 1$ è un primo maggiore o uguale a $n + 1$. Indichiamo $c_s = s(s + 1)$. Dimostrare che:

$$c_1 c_2 \cdot c_n \mid (c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k) \cdots (c_{m+n} - c_k)$$

4. Dati due triangoli acuti $A_0B_0C_0, A_1B_1C_1$ costruire il triangolo ABC di area massima tale che:

   - ABC è circoscritto ad $A_0B_0C_0$ (cioè $A_0 \in BC, B_0 \in CA, C_0 \in AB$)
   - ABC è simile ad $A_1B_1C_1$

5. $a_1, a_2, \ldots, a_8$ sono numeri reali, non tutti uguali a 0. Sia $c_n = a_1^n + a_2^n + a_3^n + \ldots + a_8^n$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$. Si sa che per infiniti k, $c_k = 0$. Trovare tutti i k per cui $c_k = 0$.

6. In una gara sportiva, sono state consegnate m medaglie in n giorni. Il primo giorno si consegnò una medaglia e $\frac{1}{7}$ delle rimanenti. Il secondo giorno si consegnarono 2 medaglie e $\frac{1}{7}$ delle rimanenti, e così via. L'ultimo giorno si consegnarono le rimanenti n medaglie.

   Quante medaglie sono state consegnate?

   Quanti giorni sono durate le gare?

IMO 1968

1. Trovare tutti i triangoli tali che le lunghezze dei lati sono tre interi consecutivi, e un angolo è il doppio dell'altro.

2. Trovare tutti gli $n \in \mathbb{N}$ il cui prodotto delle cifre decimali è $n^2 - 10n - 22$.

3. a, b, c sono tre numeri reali, non tutti uguali a 0. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soddisfano le n equazioni:

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + c &= x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c &= x_3 \\ &\cdots \\ ax_n^2 + bx_n + c &= x_1 \end{aligned}$$

   Dimostrare che, a seconda che $(b-1)^2 - 4ac < 0, (b-1)^2 - 4ac = 0, (b-1)^2 - 4ac > 0$, il sistema ha rispettivamente $0, 1, > 1$ soluzioni reali.

4. Dimostrare che in ogni tetraedro possiamo scegliere tre spigoli con la lunghezza adatta a formare i lati di un triangolo.

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che, per una costante $a > 0$, abbiamo:

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

   Dimostrare che f è periodica, e dare un esempio di una f non costante per il caso $a = 1$.

6. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, valutare la somma:

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{8} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor + \ldots$$

   dove $\lfloor x \rfloor$ indica il più grande intero $\leq x$.

IMO 1969

1. Dimostrare che esistono infiniti interi positivi m tali che, per ogni intero positivo n, $n^4 + m$ non è primo.

2. Date le costanti reali $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sia

   $$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2}\cos(a_2 + x) + \frac{1}{4}\cos(a_3 + x) + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x)$$

   Dimostrare che, se per $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ vale $f(x_1) = f(x_2) = 0$, $x_1 - x_2$ è un multiplo di π.

3. Per $k = 1, 2, 3, 4, 5$, trovare tutti e soli i valori $a > 0$ per cui esiste un tetraedro con k spigoli di lunghezza a e i rimanenti di lunghezza 1.

4. C è un punto sulla semicirconferenza di diametro AB, D è la proiezione di C su AB. K_1 è la circonferenza inscritta ad ABC, K_2 è la circonferenza tangente a CD, DA e alla circonferenza, K_3 è la circonferenza tangente a CD, DB e alla circonferenza. Dimostrare che K_1, K_2, K_3 hanno un'ulteriore tangente comune oltre ad AB.

5. Sono dati $n \geq 5$ punti nel piano, a tre a tre non allineati. Dimostrare che esistono almeno $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ quadrilateri convessi con i vertici scelti tra gli n punti.

6. I numeri reali $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ soddisfano $x_1 > 0, x_2 > 0$, $x_1y_1 > z_1^2$, $x_2y_2 > z_2^2$. Dimostrare che:

   $$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}$$

   Quando si ottiene l'uguaglianza?

IMO 1970

1. M è un punto sul lato AB del triangolo ABC. r, r_A, r_B sono i raggi dei cerchi inscritti ai triangoli ABC, AMC, BMC. q, q_A, q_B sono i raggi dei cerchi exinscritti ai triangoli ABC, AMC, BMC rispetto al vertice C. Dimostrare che $r_A r_B q = q_A q_B r$

2. a, b sono interi positivi con $a > b \geq 2$. $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sono interi non negativi minori di b, e x_n, x_{n-1} sono diversi da 0.

   $x_n x_{n-1} \ldots x_0$ è la rappresentazione dell'intero A in base a e la rappresentazione dell'intero B in base b. $x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_0$ è la rappresentazione dell'intero A' in base a e la rappresentazione dell'intero B' in base b.

   Dimostrare che $A'B < AB'$.

3. La sequenza di reali $a_0, a_1, a_2, \ldots$ soddisfa $1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots$. La sequenza di reali $b_1, b_2, \ldots$ è definita da

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}}{\sqrt{a_k}}$$

   .

   - Dimostrare che $0 \leq b_n < 2$
   - Dimostrare che per ogni $0 \leq c < 2$ esiste una sequenza $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tale che $b_n > c$ per ogni n sufficientemente grande.

4. Trovare tutti gli interi positivi n tali che l'insieme $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ può essere partizionato in due insiemi il cui prodotto degli elementi è uguale.

5. Nel tetraedro $ABCD$, $\angle BCD = 90$ e la proiezione di D su ABC è l'ortocentro di ABC. Dimostrare che:

$$(AB + BC + CA)^2 \leq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$$

   Quando vale l'uguaglianza?

6. Dati 100 punti sullo stesso piano, a tre a tre non allineati, dimostrare che tra tutti i triangoli formati da questi punti, al più $\frac{7}{10}$ hanno tutti gli angoli acuti.

IMO 1971

1. Definiamo:

$$\begin{aligned} E_n = &(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\dots(a_1 - a_n) &+\\ &+(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\dots(a_2 - a_n) &+\\ &+\dots &+\\ &+(a_n - a_1)(a_n - a_2)\dots(a_n - a_{n-1}) \end{aligned}$$

   Dimostrare che $E_3 \geq 0$ ed $E_5 \geq 0$ per ogni scelta di numeri reali a_i, ma che per $n > 2, n \neq 3, n \neq 5$ esistono dei reali a_i per cui $E_n < 0$.

2. Sia P_1 un poliedro convesso con vertici $A_1, A_2, \dots, A_9$. Sia P_i il poliedro ottenuto da P_1 con la traslazione che manda A_1 in A_i. Dimostrare che almeno due tra i poliedri $P_1, P_2, \dots, P_9$ hanno un punto interno in comune.

3. Dimostrare che esiste un insieme infinito di interi della forma $2^n - 3$, con n intero positivo, a due a due relativamente primi.

4. Tutte le facce del tetraedro $ABCD$ hanno gli angoli acuti. Consideriamo l'insieme delle quaterne di punti (X, Y, Z, T) con X interno al segmento AB, Y interno a BC, Z interno a CD, T interno a DA. Dimostrare che:

   - Se $\angle DAB + \angle BCD \neq \angle CDA + \angle ABC$, allora nessuno dei percorsi chiusi $XYZTX$ ha lunghezza minimale.
   - Se $\angle DAB + \angle BCD = \angle CDA + \angle ABC$, allora esistono infiniti percorsi chiusi $XYZTX$ con lunghezza minima, ciascuno di lunghezza $2AC \sin k$, dove $2k = \angle BAC + \angle CAD + \angle DAB$.

5. Dimostrare che per ogni intero positivo m esiste un insieme finito S di punti del piano tali che, per ogni punto $A \in S$, esistono esattamente m punti di S a distanza unitaria da A.

6. Sia $A = (a_{ij})$, con $i, j = 1, 2, \dots, n$ una matrice quadrata dove tutti gli a_{ij} sono interi non negativi. Per ogni i, j tali che $a_{ij} = 0$, la somma degli elementi nella i-esima riga o nella j-esima colonna è almeno n.

   Dimostrare che la somma degli elementi della matrice è almeno $\frac{n^2}{2}$.

IMO 1972

1. Comunque preso un insieme di 10 interi nell'intervallo $10, 11, 12, \ldots, 99$, esistono due sottoinsiemi disgiunti con la stessa somma.

2. Dato $n > 4$, dimostrare che ogni quadrilatero ciclico può essere diviso in n quadrilateri ciclici.

3. Dimostrare che, per ogni m, n interi positivi:
$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} \in \mathbb{N}$$

4. Trovare tutte le soluzioni reali positive a:
$$\begin{aligned}
(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) &\leq 0 \\
(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) &\leq 0 \\
(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) &\leq 0 \\
(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) &\leq 0 \\
(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) &\leq 0
\end{aligned}$$

5. f, g sono funzioni dai reali nei reali posirivi. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$:
$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$$
f non è costante e $|f(x)| \leq 1 \quad \forall x$. Dimostrare che $|g(x)| \leq 1 \quad \forall x$.

6. Dati quattro piani paralleli e distinti, dimostrare che esiste un tetraedro regolare che ha un vertice su ciascun piano.

IMO 1973

1. $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \ldots, \overrightarrow{OP_{2n+1}}$ sono vettori unitari nel piano. $P_1, P_2, \ldots, P_{2n+1}$ sono tutti dalla stessa parte di una retta passante per O. Dimostrare che

$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \ldots + \overrightarrow{OP_{2n+1}}| \geq 1$$

2. Esiste un insieme finito di punti S non sullo stesso piano, tali che comunque presi due punti $A, B \in S$ esistono altri due punti $C, D \in S$ tali che le rette AB, CD sono parallele e distinte?

3. Il polinomio $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$, con a, b reali, ha almeno una radice reale. Trovare il più piccolo valore possibile per $a^2 + b^2$.

4. Un soldato deve sminare un'area dalla forma di triangolo equilatero. Per fare questo usa un detector circolare, il cui raggio è la metà dell'altezza del triangolo. Parte da un vertice del triangolo. Che percorso deve seguire per camminare il minimo possibile e sminare l'intera area?

5. G è un insieme di funzioni non costanti dai reali nei reali, ciascuna della forma $f(x) = ax + b$ con a, b reali. Se $f, g \in G$ allora anche $f \circ g \in G$, dove $(f \circ g)(x) = g(f(x))$. Se $f \in G$, allora anche $f^{-1} \in G$, dove $f^{-1}(f(x)) = x$. Ogni funzione di G ha un punto fisso (cioè un $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = x$). Dimostrare the tutte le funzioni di G hanno lo stesso punto fisso.

6. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono reali positivi, e $0 < q < 1$ è un reale. Dimostrare che esistono reali $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tali che:
   - $a_i < b_i$ per $i = 1, 2, \ldots, n$
   - $q < \frac{b_{i+1}}{b_i} < \frac{1}{q}$ per $i = 1, 2, \ldots, n-1$
   - $b_1 + b_2 + \ldots + b_n < (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\frac{1+q}{1-q}$

IMO 1974

1. Tre giocatori fanno il seguente gioco: ci sono tre carte, ciascuna con un intero positivo diverso. Ad ogni turno le carte vengono mescolate e viene data una a ciascun giocatore. Ogni giocatore guadagna tanti punti quanto vale la carta ricevuta.

   Dopo almeno 2 turni, un giocatore ha 20 punti, un altro 10 e il terzo 9. Nell'ultimo turno, il giocatore con 10 punti ha preso la carta con l'intero maggiore. Chi ha ricevuto la carta media (quella il cui numero non è ne il più grande ne il più piccolo) al primo turno.

2. ABC è un triangolo. Dimostrare che esiste un punto D sul lato AB tale che $CD^2 = AD \cdot DB$ se e soltanto se $\sin A \sin B \leq \sin^2 \frac{C}{2}$.

3. Dimostrare che, per ogni intero $n \geq 0$,

   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$$

   non è mai un multiplo di 5.

4. Una scacchiera 8×8 è partizionata in p rettangoli tali che:

   - ogni rettangolo è formato da caselle intere (non divide mai un quadratino in parti)
   - ogni rettangolo ha tante caselle bianche quante nere
   - tutti rettangoli contengono un numero diverso di caselle

   Trovare il massimo valore di p, e nel caso in cui p è massimo, tutti i possibili valori che possono avere le grandezze dei rettangoli.

5. Trovare tutti i possibili valori di

   $$\frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a}$$

   al variare di a, b, c, d tra i reali positivi.

6. Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti interi di grado $d > 0$. Sia n il numero di radici intere distinte alle equazioni $P(x) = 1$ o $P(x) = -1$.

   Dimostrare che $n \leq d + 2$.

IMO 1975

1. Siano $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$ numero reali. Dimostrare che se z_i sono una qualsiasi permutazione degli y_i, allora:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

2. Siano $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ interi positivi. Dimostrare che per ogni $i \geq 1$ e per ogni coppia r, s di interi positivi esistono infiniti a_n che si possono scrivere nella forma:

$$a_n = ra_i + sa_j$$

per un certo $j > i$.

3. Costruiamo i triangoli ABR,BCP,CAQ esternamente ai lati del triagolo ABC in modo che $\angle PBC = 45$, $\angle PCB = 30$, $\angle QAC = 45$, $\angle QCA = 30$, $\angle RAB = 15$, $\angle RBA = 15$.

   Dimostrare che $\angle QRP = 90$ e $QR = RP$.

4. Sia $f(n)$ la somma delle cifre decimali di n. Calcolare $f(f(f(4444^{4444})))$.

5. Esistono 1975 punti su una circonferenza di raggio 1 tali che la distanza tra due di loro è sempre razionale?

6. Trovare tutti i polinomi $P(x, y)$ in due variabili tali che:

   - $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$ per un certo n intero positivo e ogni $t, x, y \in \mathbb{R}$
   - per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$: $P(y + z, x) + P(z + x, y) + P(x + y, z) = 0$
   - $P(1, 0) = 1$

IMO 1976

1. Un quadrilatero convesso ha area 32 e la somma di due lati opposti e di una diagonale è 16. Trovare tutte le possibili lunghezze dell'altra diagonale.

2. Sia $P_1(x) = x^2 - 2$ e $P_{i+1} = P_1(P_i(x))$. Dimostrare che le radici di $P_n(x)$ sono reali e distinte per ogni n.

3. Una scatola rettangolare può essere completamente riempita da cubi di lato 1. Se vogliamo riempire la scatola con cubi di volume 2, con i lati paralleli ai lati della scatola, possiamo riempire al massimo i $\frac{2}{5}$ della scatola. Determinare le possibili dimensioni della scatola.

4. Trovare il più grande intero che è prodotto di interi positivi con somma 1976.

5. n è un intero positivo e $m = 2n$. $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$ per $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. Le m incognite $x_1, x_2, \ldots, x_m$ soddisfano

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_m = 0$$

per $i = 1, 2, \ldots, n$. Dimostrare che il sistema ha una soluzione negli interi con valore assoluto $\leq m$, non tutti uguali a 0.

6. La sequenza $u_0, u_1, \ldots$ è definita da:

$$\begin{aligned} u_0 &= 2 \\ u_1 &= \frac{5}{2} \\ u_{n+2} &= u_{n+1}(u_n^2 - 2) - u_1 \end{aligned}$$

Dimostrare che:

$$[u_n] = 2^{\frac{(2^n - (-1)^n)}{3}}$$

dove $[x]$ è il più grande intero $\leq x$.

IMO 1977

1. Si costruiscano triangoli equilateri ABK, BCL, CDM, DAN all'interno del quadrato $ABCD$.

   Dimostrare che i punti medi di KL, LM, MN, NK e i punti medi di $AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN$ formano un dodecagono regolare.

2. In una sequenza finita di numeri reali, la somma di 7 termini consecutivi è negativa e la somma di 11 termini consecutivi è positiva. Determinare la massima lunghezza della successione.

3. Dato un intero $n > 2$, sia V_n l'insieme degli interi della forma $1 + kn$ con k intero positivo. Un numero $m \in V_n$ si dice indecomponibile se non è prodotto di due elementi di V_n. Dimostrare che esiste un intero in V_n che si può scrivere come prodotto di elementi indecomponibili di V_n in almeno due modi distinti (due scomposizioni in cui cambia solo l'ordine dei fattori sono uguali).

4. Sia $f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x$, dove a, b, A, B sono costanti reali. Supponiamo che $f(x) \geq 0$ per ogni x reale.

   Dimostrare che $a^2 + b^2 \leq 2$ e $A^2 + B^2 \leq 1$.

5. Siano a, b interi positivi. Quando $a^2 + b^2$ è diviso per $a + b$, il quoziente è q e il resto r. Trovare tutte le coppie a, b per cui $q^2 + r = 1977$.

6. La funzione f è definita sugli interi positivi e i sui valori sono interi positivi. Sapendo che $f(n + 1) > f(f(n))$ per ogni n, dimostrare che $f(n) = n$ per ogni n.

IMO 1978

1. m, n sono interi positivi con $m < n$. I numeri $1978^n, 1978^m$ finiscono con le stesse ultime 3 cifre. Trovare m ed n in modo che $m + n$ ha il minimo valore possibile.

2. P è un punto interno a una sfera. Tre semirette con origine in P, a due a due perpendicolari, intersecano la sfera in U, V, W. Q è il vertice opposto a P nel parallelepipedo determinato da PU, PV, PW. Trovare il luogo dei Q al variare di tutte le possibili terne di semirette perpendicolari con origine in P.

3. L'insieme degli interi positivi è partizionato nell'unione di due insiemi disgiunti
$$\{f(1), f(2), f(3), \ldots\}$$
$$\{g(1), g(2), g(3), \ldots\}$$
con $f(1) < f(2) < \ldots$, $g(1) < g(2) < \ldots$. Sapendo che $g(n) = f(f(n)) + 1$ per ogni n intero positivo, determinare $f(240)$.

4. Nel triangolo ABC, $AB = AC$. Una circonferenza è tangente internamente alla circonferenza circoscritta ad ABC ed è tangente ad AB, AC in P, Q. Dimostrare che il punto medio di PQ è l'incentro del triangolo.

   Remark. Il risultato è vero anche se $AB \neq AC$.

5. $\{a_k\}$ è una sequenza di interi positivi distinti. Dimostrare che per ogni intero positivo n:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

6. I membri di una società internazionale provengono da sei stati. La lista dei membri ha 1978 nomi, numerati $1, 2, \ldots, 1978$. Dimostrare che esiste almeno un membro il cui numero è la somma dei numeri di due membri del suo paese, o il doppio del numero di un membro del suo paese.

IMO 1979

1. Siano m, n interi positivi tali che:
$$\frac{m}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$$
Dimostrare che m è un multiplo di 1979.

2. È Le basi di un prisma sono i pentagoni $A_1A_2A_3A_4A_5$ e $B_1B_2B_3B_4B_5$. Ogni lato dei due pentagoni e ciascuno dei 25 segmenti A_iB_j è colorato di rosso o di verde. Ogni triangolo i cui vertici sono vertici del prisma e i cui lati sono stati colorati, ha due lati di colore diverso. Dimostrare che tutti i 10 lati di entrambe le basi hanno lo stesso colore.

3. Due circonferenze su un piano si intersecano. A è uno dei punti di intersezione. Due punti P, Q, partendo da A, si muovono ciascuno sul suo cerchio a velocità costante e nello stesso senso. I due punti, dopo un giro, si ritrovano contemporaneamente in A. Dimostrare che esiste un punto fisso P che in ogni momento è equidistante da P, Q.

4. Dato un piano k, un punto P sul piano e un punto Q non sul piano, trovare tutti i punti $R \in k$ tali che
$$\frac{QP + PR}{QR}$$
è massimo.

5. Trovare tutti i numeri reali a tali che esistono reali non negativi x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 che soddisfano:
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = a$$
$$x_1 + 2^3x_2 + 3^3x_3 + 4^3x_4 + 5^3x_5 = a^2$$
$$x_1 + 2^5x_2 + 3^5x_3 + 4^5x_4 + 5^5x_5 = a^3$$

6. Siano A, E vertici opposti di un ottagono. Una rana parte dal vertice A. Da ogni vertice diverso da E, la rana salta ad uno dei due vertici adiacenti. Quando raggiunge E, si ferma. Sia a_n il numero di percorsi di esattamente n salti con cui la rana può arrivare in E. Dimostrare che:
$$a_{2n-1} = 0$$
$$a_{2n} = \frac{(2+\sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}} - \frac{(2-\sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}}$$

IMO 1980

1. Non c'era nessuna IMO nel 1980.
2. Meglio, cosi' mi risparmio la fatica di scriverla.
3. Peccato però, voi vi perderete il divertimento di risolverla
4. E sono ancora arrabbiato perchè ho dimenticato le belle infradito nere nell'albergo a Pisa
5. Sì, proprio quelle infradito con cui volevo andare alla cerimonia di apertura delle IMO, idea alla quale Maria si oppose con furia facendomi desistere.
6. O forse quel pirla del Tama le ha messe nella sua borsa, ma io non sospetto così senza motivo dei miei amici. . .

IMO 1981

1. P è un punto interno al triangolo ABC. D, E, F sono le proiezioni di P sulle rette BC, CA, AB. Trovare tutti i punto P che minimizzano:

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

2. Siano n, r interi positivi con $1 \leq r \leq n$. Sia $S_{n,r}$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\{1, 2, \ldots, n\}$ con r elementi. Sia

$$F(n,r) = \frac{\sum_{A \in S} \min A}{|S|}$$

la media aritmetica dei minimi degli elementi di S. Dimostrare che $F(n,r) = \frac{n+1}{r+1}$.

3. Trovare il massimo valore di $m^2 + n^2$, dove m, n sono interi tali che $1 \leq m, n \leq 1981$ e $(n^2 - nm + m^2)^2 = 1$.

4. Per quali $n > 2$ esiste un insieme di n interi positivi consecutivi tali che il massimo dell'insieme è un divisore del minimo comune multiplo dei rimanenti $n - 1$ numeri? Per quali $n > 2$ esiste un unico insieme con questa proprietà?

5. Tre cerchi con lo stesso raggio si intersecano nel punto O e sono interni a un triangolo. Ogni lato del triangolo è tangente a due cerchi. Dimostrare che l'incentro del triangolo, il circocentro del triangolo e il punto O sono allineati.

6. La funzione $f(x,y)$ soddisfa:

   - $f(0,y) = y + 1$
   - $f(x+1, 0) = f(x, 1)$
   - $f(x+1, y+1) = f(x, f(x+1, y))$

   per tutti gli interi non negativi x, y. Trovare $f(4, 1981)$.

IMO 1982

1. La funzione $f(n)$ è definita sugli interi positivi e ha per valori interi non negativi.

   $f(2) = 0,\ f(3) \neq 0,\ f(9999) = 3333$ e per ogni m, n:

   $$f(m+n) - f(m) - f(n) \in \{0, 1\}$$

   Trovare $f(1982)$.

2. Un triangolo scaleno $A_1A_2A_3$ ha lati a_1, a_2, a_3 con a_i opposto ad A_i. M_i è il punto medio di a_i e T_i è il punto dove la circonferenza inscritta tocca a_i. Sia S_i il simmetrico di T_i rispetto alla bisettrice di A_i. Dimostrare che le rette M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 concorrono.

3. Consideriamo una successione infinita $\{x_n\}$ di reali positivi tali che $x_0 = 1$ e $x_0 \geq x_1 \geq \ldots$.

   Dimostrare che esiste un $n \geq 1$ tale che:

   $$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3.999$$

   Trovare una sequenza per cui, per ogni n:

   $$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4$$

4. Dimostrare che se n è un intero positivo tale che l'equazione

   $$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$$

   ha soluzioni negli interi x, y, allora ha almeno tre soluzioni. Dimostrare che non ci sono soluzioni intere per $n = 2891$.

5. Le diagonali AC e CE dell'esagono regolare $ABCDEF$ sono divise da punti interni M ed N, rispettivamente, in modo che:

   $$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$$

   . Sapendo che B, M, N sono allineati, determinare r.

6. Sia S un quadrato con il lato lungo 100. Sia L un percorso interno ad S, senza auto-intersezioni, formato dai segmenti $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ con $A_0 \neq A_n$. Supponiamo che per ogni punto P sul perimetro di S esiste un punto di L che dista da P al più $\frac{1}{2}$. Dimostrare che esistono due punti X, Y di L tali che la distanza tra X e Y è al più 1 e la parte di L compresa tra X ed Y è lunga almeno 198.

IMO 1983

1. Trovare tutte le funzioni f dai reali positivi nei reali positivi che soddisfano:
$$f(xf(y)) = yf(x)$$
e tali che $f(x)$ tende a 0 quando x tende ad infinito.

2. Due circonferenze C_1 e C_2, con centri O_1 e O_2 e con raggi diversi, si intersecano in due punti, uno dei quali è A. Una tangente comune alle due circonferenze tocca C_1 in P_1 e C_2 in P_2, l'altra tocca C_1 in Q_1 e C_2 in Q_2. Sia M_1 il punto medio di P_1Q_1 e M_2 il punto medio di P_2Q_2. Dimostrare che $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$.

3. Siano a, b, c interi positivi, a due a due relativamente primi. Dimostrare che $2abc - ab - bc - ca$ è il più grande intero che non ci può esprimere nella forma $xbc + yca + zab$, dove x, y, z sono interi non negativi.

4. Sia ABC un triangolo equilatero ed E la sua frontiera (cioè l'unione dei segmenti AB, BC, CA). Determinare se, per ogni partizione di E in due insiemi, almeno uno dei due contiene i vertici di un triangolo rettangolo.

5. È possibile scegliere 1983 interi positivi distinti, tutti minori o uguali a 10^5, in modo che non ce ne siano tre in progressione aritmetica?

6. Siano a, b, c le lunghezze dei lati di un triangolo. Dimostrare che
$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$
Quando vale l'uguaglianza?

IMO 1984

1. Dimostrare che $0 \leq yz + zx + xy - 2xyz \leq \frac{7}{27}$, dove x, y, z sono reali positivi che soddisfano $x + y + z = 1$.

2. Trovare una coppia di interi positivi a, b tali che $ab(a + b)$ non è divisibile per 7, ma $(a + b)^7 - a^7 - b^7$ è divisibile per 7^7.

3. Sono dati due punti del piano O e A. Ogni punto del piano è colorato con uno tra un numero finito di colori. Dato un punto X nel piano, il cerchio $C(X)$ ha centro O e raggio $OX + \frac{\angle AOX}{OX}$, dove $\angle AOX$ è misurato in radianti nell'intervallo $[0, 2\pi)$.

   Dimostrare che possiamo trovare un punto X, non sulla retta OA, in modo che il colore di X compare anche sulla circonferenza di $C(X)$.

4. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso con la retta CD tangente alla circonferenza di diametro AB. Dimostrare che la retta AB è tangente alla circonferenza di diametro CD se e soltanto se BC e AD sono parallele.

5. Dato un poligono convesso con $n \geq 4$ vertici, sia d la somma delle lunghezze di tutte le diagonali e p il suo perimetro. Dimostrare che:

$$n - 3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right] \left[\frac{n+1}{2}\right] - 2$$

   dove $[x]$ è il più grande intero minore o uguale ad x.

6. Siano a, b, c, d interi dispari tali che $0 < a < b < c < d$ e $ad = bc$. Dimostrare che, se $a + d = 2^k$ e $b + c = 2^m$ per alcuni interi k ed m, allora $a = 1$.

IMO 1985

1. Una circonferenza ha centro sul lato AB del quadrilatero ciclico $ABCD$. Gli altri tre lati sono tangenti alla circonferenza. Dimostrare che $AD + BC = AB$.

2. Siano n, k interi positivi relativamente primi, con $k < n$. Ogni numero dell'insieme $M = \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ è colorato in blu o in bianco. Per ogni $i \in M$, i ed $n - i$ hanno lo stesso colore. Per ogni $i < inM, i \neq k$, i e $|i - k|$ hanno lo stesso colore. Dimostrare che tutti i numeri di M hanno lo stesso colore.

3. Per ogni polinomio a coefficienti interi $P(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$, sia $o(P)$ il numero di coefficienti dispari.

   Per $i = 0, 1, 2, \ldots$, sia $Q_i(x) = (1 + x)^i$. Dimostrare che se $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sono interi che soddisfano $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n$, allora:

   $$o(O_{i_1} + O_{i_2} + \ldots + O_{o_n}) \geq o(O_{i_1})$$

4. Dato un insieme M con 1985 interi positivi, nessuno dei quali con un divisore primo maggiore di 23, dimostrare che M contiene un sottoinsieme di 4 elementi il cui prodotto è la quarta potenza di un intero.

5. Una circonferenza O passa per i vertici A e C tel triangolo ABC e interseca i segmenti AB e BC di nuovo nei punti K ed N, rispettivamente. Le circonferenze circoscritte ad ABC e KBN si intersecano nei due punti distinti B e M. Dimostrare che l'angolo $\angle OMB$ è retto.

6. Per ogni reali x_1, costruiamo la sequenza $x_1, x_2, \ldots$ con la regola $x_{n+1} = x_n(x_n + \frac{1}{n})$.

   Dimostrare che esiste esattamente un valore di x_1 per cui $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ per ogni n.

IMO 1986

1. Sia d un intero positivo diverso da $2, 5, 13$. Dimostrare che nell'insieme $\{2, 5, 13, d\}$ esistono due elementi distinti a, b tali che $ab - 1$ non è un quadrato perfetto.

2. È dato un punto P_0 nel piano del triangolo $A_1A_2A_3$. Definiamo $A_s = A_{s-3}$ per $s \geq 4$. Costruiamo la sequenza $P_1, P_2, P_3, \ldots$ in modo che P_{k+1} è l'immagine di P_k sotto una rotazione di centro A_{k+1} e angolo 120 in senso orario. Dimostrare che se $P_{1986} = P_0$, allora il triangolo $A_1A_2A_3$ è equilatero.

3. Ad ogni vertice di un pentagono regolare è assegnato un intero, in modo che la somma dei 5 numeri è positiva. Se a tre vertici consecutivi sono assegnati i numeri x, y, z rispettivamente, e $y < 0$, allora si può sostituire x, y, z con $x + y, -y, z + y$ rispettivamente. Determinare se è possibile continuare ad eseguire l'operazione all'infinito, o se dopo un numero finito di passi arriveremo alla situazione in cui tutti i vertici hanno un intero positivo.

4. Siano A, B vertici adiacenti di un n-agono regolare ($n \geq 5$) con centro O. Un triangolo XYZ, che è congruente ad OAB e all'inizio coincide con AOB, si muove sul piano in modo che Y, Z si spostano lungo il perimetro del poligono, mentre X resta all'interno. Determinare il luogo che viene tracciato da X.

5. Trovare tutte le funzioni f dai reali non negativi ai reali non negativi tali che:

   - $f(2) = 0$
   - $f(x) \neq 0$ per $0 \leq x \leq 2$
   - $f(xf(y))f(y) = f(x + y)$ per tutti i reali non negativi x, y

6. Dato un insieme finito di punti nel piano, ciascuno con coordinate intere, è sempre possibile colorare i punti in rosso o bianco, in modo che per ogni retta L, parallela a $x = 0$ o $y = 0$, la differenza (in valore assoluto) tra i punti bianchi e rossi di L sia minore o uguale a 1?

IMO 1987

1. Sia $p_n(k)$ il numero di permutazioni dell'insieme $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ con esattamente k punti fissi. Dimostrare che:

$$\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!$$

2. In un triangolo acuto ABC, la bisettrice interna dell'angolo A interseca BC in L e interseca la circonferenza circoscritta ad ABC in N. Le proiezioni di L su AB, AC sono rispettivamente K, M. Dimostrare che il quadrilatero $AKNM$ e ABC hanno la stessa area.

3. Siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numeri reali che soddisfano $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Dimostrare che per ogni intero $k \geq 2$ esistono interi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, non tutti 0, tali che $|a_i| \leq k - 1$ per tutti gli i e che:

$$|a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n| \leq (k-1)\frac{\sqrt{n}}{kn-1}$$

4. Dimostrare che non esiste nessuna funzione f dagli interi non negativi in se stessa tale che $f(f(n)) = n + 1987$ per ogni n.

5. Sia $n \geq 3$ un intero. Dimostrare che esiste un insieme di n punti del piano in modo che la distanza tra due di loro è sempre irrazionale e ogni terna di punti determina un triangolo non degenere con area razionale.

6. Sia $n \geq 2$ un intero. Dimostrare che se $k^2 + k + n$ è primo per tutti gli interi k tali che $0 \leq k \leq \sqrt{\frac{n}{3}}$, allora $k^2 + k + n$ è primo per tutti gli interi k tali che $0 \leq k \leq n - 2$.

IMO 1988

1. Consideriamo due circonferenze nello stesso piano, di raggi $R > r$ e con lo stesso centro. Sia P un punto fisso sulla circonferenza più piccola e B un punto variabile sulla circonferenza più grande. La retta BP interseca di nuovo la circonferenza grande in C. La perpendicolare a BP per P interseca la circonferenza piccola in A.

    - trovare l'insieme dei valori che può assumere $AB^2 + BC^2 + CA^2$
    - trovare il luogo dei punti medi di BC.

2. Sia n un intero positivo e siano $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ sottoinsiemi dell'insieme B. Sapendo che:

    - Ogni A_i ha esattamente $2n$ elementi
    - L'intersezione tra due A_i distinti ha esattamente un elemento
    - Ogni elemento di B appartiene ad almeno due degli A_i

    Per quali valori di n possiamo colorare alcuni elementi di B di verde, in modo che ogni A_i ha esattamente n elementi verdi?

3. Una funzione è definita sugli interi positivi da:

    - $f(1) = 1$
    - $f(3) = 3$
    - $f(2n) = f(n)$
    - $f(4n + 1) = 2f(2n + 1) - f(n)$
    - $f(4n + 3) = 3f(2n + 1) - 2f(n)$

    per tutti gli interi positivi n. Trovare il numero di interi $1 \leq n \leq 1988$ tali che $f(n) = n$.

4. Dimostrare che l'insieme dei reali x che soddisfano la disuguaglianza:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} + \ldots + \frac{70}{x-70} \geq \frac{5}{4}$$

    è un'unione di intervalli disgiunti, la cui somma delle lunghezze è 1988.

5. ABC è un triangolo retto in A, D è il piede dell'altezza uscente da A. La retta passante per gli incentri dei triangoli ABD ed ACD interseca AB, AC in K, L rispettivamente. Dimostrare che l'area di ABC è almeno il doppio dell'area di AKL.

6. Siano a, b interi positivi tali che $ab + 1$ divide $a^2 + b^2$. Dimostrare che

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

    è un quadrato perfetto.

IMO 1989

1. Dimostrare che l'insieme $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ può essere espresso come unione disgiunta degli insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_{117}$ in modo che ogni A_i abbia 17 elementi e la somma degli elementi di ogni A_i sia la stessa.

2. In un triangolo acuto ABC, la bisettrice interna dell'angolo A interesca la circonferenza circoscritta in A_1. I punti B_1, C_1 sono definiti in modo simile. Sia A_2 il centro della circonferenza ex-inscritta ad ABC opposta ad A. B_2, C_2 sono definiti in modo simile. Dimostrare che l'area di $A_2B_2C_2$ è il doppio dell'area dell'esagono $AC_1BA_1CB_1$ e almeno quattro volte l'area di ABC.

3. Siano n, k interi positivi, e sia S un insieme di n punti nel piano, a tre a tre non allineati, e tali che per ogni punto $P \in S$ esistono almeno k punti di S equidistanti da P.

   Dimostrare che $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

4. sia $ABCD$ un quadrilatero convesso tale che i lati AB, BC, CA soddisfano $AB = AD + BC$. Esiste un punto P interno al quadrilatero a distanza h dalla retta CD tale che $AP = h + AD$ e $BP = h + BC$. Dimostrare che:

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$

5. Dimostrare che per ogni intero positivo n esistono n interi positivi consecutivi, nessuno dei quali è un primo o la potenza di un primo.

6. Una permutazione $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ dell'insieme $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ si dice pulita se $|x_i - x_{i+1}| = n$ per almeno un i in $\{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$. Dimostrare che per ogni n ci sono più permutazioni pulite che non pulite.

IMO 1990

1. Le corde AB e CD di una circonferenza si intersecano nel punto E, interno alla circonferenza. Sia M un punto interno al segmento EB. La tangente per E alla circonferenza per D, E, M interseca le rette BC, AC in F, G rispettivamente. Trovare $\frac{EG}{EF}$ in funzione di $t = \frac{AM}{AB}$.

2. Sia $n \geq 3$ un intero e consideriamo un insieme E di $2n-1$ punti distinti su una circonferenza. Esattamente k di questi punti sono neri. Una colorazione è buona se esiste almeno una coppia di punti neri tali che l'interno di uno dei due archi che li collegano contiene esattamente n punti di E. Trovare il minimo valore di k tale che ogni colorazione con almeno k punti neri è buona.

3. Trovare tutti gli interi $n \geq 2$ tali che
$$\frac{2^n+1}{n^2}$$
è un intero.

4. Costruire una funzione dai razionali positivi nei razionali positivi tale che:
$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$$
per ogni coppia di razionali positivi x, y.

5. Dato un intero iniziale $n_0 > 1$, due giocatori A,B scelgono a turno (partendo da A) una sequenza di interi $n_1, n_2, \dots$ secondo le seguenti regole:

   - Conoscendo n_{2k}, A può scegliere qualsiasi intero n_{2k+1} tale che $n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n_{2k}^2$.
   - Conoscendo n_{2k+1}, B può scegliere qualsiasi intero n_{2k+2} tale che $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}} = p^r$ per qualche primo p e qualche intero $r \geq 1$.

   Il giocatore A vince quando sceglie il numero 1990, il giocatore B vince quando sceglie il numero 1. Per quali n_0:

   - A ha una strategia vincente?
   - B ha una strategia vincente?
   - Nessun giocatore ha una strategia vincente?

6. Dimostrare che esiste un 1990-agono convesso tale che tutti i suoi angoli sono uguali e le lunghezze dei lati sono $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 1990^2$ in qualche ordine.

IMO 1991

1. Sia ABC un triangolo, I il suo incentro. Le bisettrici interne degli angoli A, B, C intersecano i lati opposti rispettivamente in A', B', C'. Dimostrare che:
$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}$$

2. Sia $n \geq 7$ un intero e siano $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tutti gli interi positivi minori di n e relativamente primi con n. Se
$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_k - a_{k-1} > 0$$
dimostrare che n è un primo o una potenza di 2.

3. Sia $S = \{1, 2, 3, \ldots, 280\}$. Trovare il minimo intero n tale che ogni sottoinsieme di S con n elementi contiene 5 numeri a due a due relativamente primi.

4. Supponiamo che G sia un grafo connesso con k archi. Dimostrare che è possibile etichettare gli archi con i numeri $1, 2, \ldots, k$ in modo tale che per ogni vertice che appartiene ad almeno due archi, il massimo comun divisore delle etichette associate agli archi a cui appartiene è 1.

5. Sia ABC un triangolo e X un punto interno ad ABC. Dimostrare che almeno uno degli angoli XAB, XBC, XCA è minore o uguale a 30.

6. Dato un reale $a > 1$, costruire una sequenza limitata di reali $x_0, x_1, x_2, \ldots$ tali che $|x_i - x_j||i - j|^a \geq 1$ per ogni coppia di indici distinti i, j.

IMO 1992

1. Trovare tutti gli interi a, b, c che soddisfano $1 < a < b < c$ tali che $(a-1)(b-1)(c-1)$ è un divisore di $abc-1$.

2. Trovare tutte le funzioni f dai reali ai reali tali che

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$$

per ogni coppia di reali x, y.

3. Cosideriamo 9 punti nello spazio, non ce ne sono 4 su uno stesso piano. Ogni coppia di punti è collegata da un segmento blu, rosso o verde. Trovare il minimo valore di n tale che, se esattamente n segmenti sono blu o rossi, esiste un triangolo con i lati tutti blu o tutti rossi.

4. La retta L è tangente alla circonferenza C ed M è un punto su L. Trovare il luogo dei punti P tali che esistono punti Q, R su L, equidistanti da M, in modo che C sia la circonferenza inscritta al triangolo PQR.

5. Sia S un insieme finito di punti nello spazio tridimensionale. Siano S_x, S_y, S_z gli insiemi delle proiezioni ortogonali dei punti di S sui piani yz, zx, xy rispettivamente. Dimostrare che:

$$|S|^2 \leq |S_x||S_y||S_z|$$

dove $|X|$ è il numero di elementi dell'insieme X.

6. Per ogni intero positivo n, $S(n)$ è il più grande intero tale che per ogni intero positivo $k \leq S_n$, n^2 può essere scritto come somma di k quadrati di interi positivi.

   - Dimostrare che $S(n) \leq n^2 - 14$ per ogni $n \geq 4$.
   - Trovare un intero n tale che $S(n) = n^2 - 14$,
   - Dimostrare che per infiniti interi n, $S(n) = n^2 - 14$.

IMO 1993

1. Sia $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, dove $n > 1$ è un intero. Dimostrare che $f(x)$ è un polinomio irriducibile.

2. Sia D un punto interno al triangolo acuto ABC tale che $\angle ADB = \angle ACB +$ 90 e $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

   - Calcolare il rapporto $\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$
   - Dimostrare che le tangenti per C alle circonferenze circoscritte ad ADC, BCD sono perpendicolari

3. Su una scacchiera infinita ci sono n^2 pedine disposte nelle caselle di un quadrato $n \times n$, una per ogni casella. Una mossa del gioco consiste nel far saltare una pedina oltre ad una pedina adiacente, in direzione verticale od orrizzontale, rimuovendo la pedina sopra la quale si è saltato. Cioè, se una casella adiacente è occupata e oltre a questa casella ce nè una libera, possiamo spostare la nostra pedina dalla sua posizione nella casella libera, togliendo la pedina compresa tra la posizione di partenza e di arrivo.

   Trovare tutti i valori di n per cui il gioco può terminare con soltanto una pedina rimasta in gioco.

4. Dati tre punti P, Q, R nel piano definiamo $m(PQR)$ come la minima lunghezza delle tre altezze del triangolo PQR (o zero se P,Q,R sono allineati). Dimostrare che, per quattro punti A, B, C, X:

$$m(ABC) \leq m(ABX) + m(BCX) + m(CAX)$$

5. Esiste una funzione dagli interi positivi agli interi positivi tale che:

   - $f(1) = 2$
   - $f(f(n)) = f(n) + n$ per ogni n
   - $f(n) < f(n+1)$ per ogni n?

6. Ci sono $n > 1$ lampadine $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$ disposte su un cerchio. Scrivendo L_{n+k} intendiamo L_k. Una lampadina è sempre o accesa o spenta. All'inizio sono tutte accese. Si eseguono le mosse $s_0, s_1, \ldots$ come segue: alla mossa s_i, se L_{i-1} è accesa, si cambia di stato L_i, altrimenti non si fa nulla. Dimostrare che:

   - Esiste un intero positivo $M(n)$ tale che dopo $M(n)$ mosse tutte le lampadine sono di nuovo accese
   - Se $n = 2^k$, possiamo prendere $M(n) = n^2 - 1$
   - Se $n = 2^k + 1$, possiamo prendere $M(n) = n^2 - n + 1$.

IMO 1994

1. Siano m, n interi positivi. A è un sottoinsieme di $\{1, 2, \ldots, n\}$ con m elementi, tale che se la somma di due suoi elementi (anche non distinti) è minore o uguale a n, questa somma appartiene ancora ad A. Dimostrare che la media aritmetica degli elementi di A è almeno $\frac{n+1}{2}$.

2. ABC è un triangolo isoscele con $AB = AC$. M è il punto medio di BC e O è il punto sulla retta AM tale che OB è perpendicolare ad AB. Q è un punto arbitrario su BC, diverso da B e da C. Una retta per Q interseca AB in E e AC in F. Dimostrare che OQ è perpendicolare ad EF se e soltanto s $QE = QF$.

3. Per ogni intero positivo k, sia $f(k)$ il numero di elementi dell'insieme $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ che hanno esattamente tre 1 quando scritti in base 2. Dimostrare che per ogni intero positivo m, c'è almeno un k con $f(k) = m$, e determinare tutti gli m per cui esiste un unico k.

4. Trovare tutte le coppie ordinate (m, n) di interi positivi per cui

$$\frac{n^3 + 1}{mn - 1} \in \mathbb{Z}$$

5. Sia S l'insieme di tutti i numeri reali maggiori di -1. Trovare tutte le funzioni f da S in S tali che

$$f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$$

per ogni $x, y \in S$, e $\frac{f(x)}{x}$ è una funzione strettamente crescente in ciascuno degli intervalli $-1 < x < 0$ e $0 < x$.

6. Dimostrare che esiste un insieme A di interi positivi con la seguente proprietà: per ogni insieme infinito di primi S, esistono due interi positivi $m \in A, n \notin A$, ciascuno dei quali è il prodotto di k elementi distinti di S per qualche $k \geq 2$.

IMO 1995

1. Siano A, B, C, D quattro punti distinti su una retta, in ques'ordine. Le circonferenze con diametro AC e BD si intersecano in X, Y. La retta XY interseca BC in Z. Sia P un punto sulla retta XY diverso da Z. La retta CP interseca la circonferenza con diametro AC in C ed M, la retta BP interseca la circonferenza con diametro BD in B ed N. Dimostrare che le rette AM, DN, XY concorrono.

2. Siano a, b, c reali positivi con $abc = 1$. Dimostrare che:
$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

3. Determinare tutti gli interi $n > 3$ per cui esistono n punti $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nel piano, a tre a tre non allineati, e numeri reali $r_1, r_2, \ldots, r_n$ tali che per distinti $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, l'area del triangolo $A_iA_jA_k$ è $r_i + r_j + r_k$.

4. Trovare il massimo valore di x_0 per cui esiste una sequenza $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ di reali positivi con $x_0 = x_{1995}$ tali che, per $i = 1, 2, \ldots, 1995$:
$$x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$$

5. Sia $ABCDEF$ un esagono convesso con $AB = BC = CD$ e $DE = EF = FA$, tale che $\angle BCD = \angle EFA = 60$. Supponiamo che G, H sono punti interni all'esagono tali che $\angle AGB = \angle DHE = 120$. Dimostrare che $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$.

6. Sia p un primo dispari. Quanti sottoinsiemi A di $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ con p elementi hanno la somma degli elementi divisibile per p?

IMO 1996

1. È dato un intero positivo r e una tabella rettangolare divisa in 20×12 quadratini unitari. Nella tabella è permesso spostarsi da un quadratino all'altro solo se la distanza tra i loro centri è $\sqrt{r}$. L'obiettivo è trovare un percorso valido che colleghi due angoli della tabella che stanno sullo stesso lato lungo 20.

    1. Dimostrare che questo è impossibile se r è divisibile per 2 o 3.
    2. Dimostrare che con $r = 73$ è possibile.
    3. È possibile per $r = 97$?

2. Sia P un punto interno al triangolo ABC tale che

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$$

   Siano D, E gli incentri dei triangoli APB, APC rispettivamente.

   Dimostrare che le rette AP, BD, CE concorrono.

3. Sia S l'insieme degli interi non negativi. Trovare tutte le funzioni f da S in S tali che

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

   per ogni $m, n \in S$.

4. Gli interi positivi a, b sono tali che $15a + 16b, 16a - 15b$ sono entrambi quadrati perfetti positivi. Qual è il più piccolo valore che può avere il più piccolo dei due quadrati?

5. Sia $ABCDEF$ un esagono convesso con i lati opposti a due a due paralleli. Siano R_A, R_C, R_E i raggi delle circonferenze circoscritte ai triangoli FAB, BCD, DEF rispettivamente, e p il perimetro dell'esagono. Dimostrare che:

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}$$

6. Siano p, q, n interi positivi con $p + q < n$. Siano $x_0, x_1, \ldots, x_n$ interi tali che $x_0 = x_n = 0$, e er ogni $1 \leq i \leq n$, $x_i - x_{i-1} \in \{p, -q\}$. Dimostrare che esistono indici $i < j$ con $(i, j) \neq (0, n)$ tali che $x_i = x_j$.

IMO 1997

1. Nel piano i punti con coordinate intere formano i vertici di quadrati unitari. I quadrati sono colorati in bianco e nero come su una scacchiera. Per ogni coppia di interi positivi m, n, si consideri un triangolo rettangolo i cui vertici hanno coordinate intere e i cui cateti, di lunghezza m, n, stiano sopra i lati dei quadrati unitari. Sia S_1 l'area della parte nera del triangolo, e S_2 l'area della parte bianca. Sia $f(m, n) = |S_1 - S_2|$.

    1. Dimostrare che $f(m, n)$ è ben definita, cioè non dipende dal triangolo che si è considerato.
    2. Calcolare $f(m, n)$ per tutti gli interi positivi m, n entrambi pari o entrambi dispari.
    3. Dimostrare che $f(m, n) \geq \frac{\max\{m,n\}}{2}$ per ogni m, n.
    4. Dimostrare che non esiste nessuna costante C tale che $f(m, n) < C$ per ogni m, n.

2. Il più piccolo angolo del triangolo ABC è quello in A. I punti B, C dividono la circonferenza circoscritta al triangolo in due archi. Sia U un punto interno all'arco tra B e C che non contiene A. Gli assi di AB, AC intersecano la retta AU in V, W rispettivamente. Le rette BV, CW si intersecano in T. Dimostrare che $AU = TB + TC$.

3. Siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numeri reali tali che $|x_1+x_2+\ldots+x_n| = 1$ e $|x_i| \leq \frac{n+1}{2}$ per ogni i. Dimostrare che esiste una permutazione y_i degli x_i tale che:

$$|y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}$$

4. Una tabella $n \times n$ contenente in ogni casella un elemento di $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ è chiamata "tabella argentata" se, per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, la i-esima riga e la i-esima colonna contengono assieme tutti gli elementi di S. Dimostrare che:

    1. non c'è nessuna tabella argentata per $n = 1997$
    2. esistono matrici argentate per infiniti valori di n.

5. Trovare tutte le coppie (a, b) di interi positivi che soddisfano:

$$a^{\left(b^b\right)} = b^a$$

6. Per ogni intero positivo n, sia $f(n)$ il numero di modi di rappresentare n come somma di potenze di 2 con esponente intero non negativo. Rappresentazioni che sono diverse solo per l'ordine degli addendi sono considerate uguali. Per esempio, $f(4) = 4$ perchè

$$4 = 4 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

Dimostrare che per ogni intero $n \geq 3$:

$$2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}$$

IMO 1998

1. In un quadrilatero convesso $ABCD$, le diagonali AC, BD sono perpendicolari ed i lati opposti AB, DC non sono paralleli. P è l'intersezione degli assi di AB e DC ed è interno ad $ABCD$. Dimostrare che $ABCD$ è ciclico se e soltanto se i triangoli ABP e CDP hanno la stessa area.

2. In una gara ci sono a partecipanti e b giudici, dove $b \geq 3$ è un intero dispari. Ogni giudice vota ogni contestante come "forte" o "scarso". Supponiamo che k sia un numero tale che, comunque presi due giudici, i loro voti coincidono per al più k partecipanti. Dimostrare che:
$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$

3. Per ogni intero positivo n, sia $d(n)$ il numero di divisori positivi di n (inclusi 1 ed n). Trovare tutti gli interi positivi k tali che $d(n^2) = k \cdot d(n)$ per qualche n.

4. Trovare tutte le coppie (a, b) di interi positivi tali che $ab^2 + b + 7$ divide $a^2b + a + b$.

5. Sia I l'incentro del triangolo ABC. La circonferenza inscritta ad ABC tocca i lati BC, CA, AB in K, L, M rispettivamente. La retta per B parallela ad MK interseca le rette LM, LK in R, S rispettivamente. Dimostrare che l'angolo $\angle RIS$ è acuto.

6. Consideriamo tutte le funzioni f dagli interi positivi agli interi positivi tali che
$$f(t^2 f(s)) = s f(t)^2$$
per ogni s, t interi positivi.

   Determinare il più piccolo valore possibile per $f(1998)$.

IMO 1999

1. Trovare tutti gli insiemi finiti S di punti del piano tali che, se A, B sono elementi distinti di S, l'asse di AB è un asse di simmetria per S.

2. Sia $n \geq 2$ un intero fissato. Trovare la minima costante C tale che per ogni $x_1, \ldots, x_n$ reali non negativi:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^4$$

Trovare i casi di uguaglianza.

3. È data una tabella quadrata $n \times n$, con n pari. Due quadrati distinti della tabella sono detti adiacenti se hanno un lato in comune, ma un quadrato non è adiacente a se stesso. Trovare il minimo numero di quadrati che devono essere segnati perchè ogni quadrato (segnato o no) sia adiacente ad almeno un quadrato segnato.

4. Trovare tutte le coppie (n, p) di interi positivi tali che p è un primo, $n \leq 2p$, e $(p-1)^n + 1$ è divisibile per n^{p-1}.

5. Due circonferenze C_1, C_2 sono interne a una circonferenza C, e le sono tangenti in M, N rispettivamente. C_1 passa attraverso il centro di C_2. La retta che passa per le intersezioni tra C_1 e C_2 interseca C in A e B. Le rette MA, MB intersecano C_1 di nuovo in E ed F. Dimostrare che la retta EF è tangente a C_2.

6. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che:

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

IMO 2000

1. AB è tangente alle circonferenze per i punti $CAMN, NMBD$. M sta tra C e D sulla retta CD, e CD è parallela ad AB. Le corde NA e CM si intersecano in P, le corde NB e MD si intersecano in Q. Le semirette CA e DB si intersecano in E.

   Dimostrare che $PE = QE$.

2. a, b, c sono reali positivi con $abc = 1$. Dimostrare che:

$$(a - 1 + \frac{1}{b})(b - 1 + \frac{1}{c})(c - 1 + \frac{1}{a}) \leq 1$$

3. k è un reale positivo. $n > 1$ è un intero. Su una retta scegliamo n punti, alcuni dei quali possono coincidere, ma non tutti. In una mossa, si scelgono due punti distinti A, B in modo che A sia alla destra di B, e si sposta B nel punto B' alla destra di A, in modo che $AB' = kBA$. Per quali valori di k possiamo spostare i punti arbitrariamente lontano a destra con una successione di mosse?

4. 100 carte sono numerate da 1 a 100 e disposte in 3 scatole (distinguibili), con almeno una carta in ogni scatola. In quanti modi può questo essere fatto, in modo che, prese due carte da due scatole distinte, conoscendo la somma delle carte è possibile identificare la terza scatola?

5. Esiste un intero positivo n, divisibile per esattamente 2000 primi, tale che n divide $2^n + 1$? n può essere divisibile per la potenza di un primo.

6. $A_1A_2A_3$ è un triangolo acuto. Il piede dell'altezza uscente dal vertice A_i è K_i e la circonferenza inscritta interseca il lato opposto ad A_i in L_i. La retta K_1K_2 è riflettuta sulla retta L_1L_2, e si fa lo stesso con le rette $(K_2K_3, L_2L_3), (K_3K_1, L_3L_1)$. Dimostrare che le tre rette ottenute formano un triangolo con vertici sulla circonferenza inscritta.

IMO 2001

1. ABC è un triangolo acuto. O è il circocentro. X è il piede dell'altezza uscente da A. $\angle BCA \geq \angle ABC + 30$. Dimostrare che $\angle CAB + \angle COX < 90$.

2. a, b, c sono reali positivi. Dimostrare che:
$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

3. In ogni casella di una tabella 21×21 c'è un intero. Ogni riga contiene al più 6 interi distinti, ogni colonna contiene al più 6 interi distinti. Dimostrare che c'è un intero che compare almeno in 3 righe e in 3 colonne.

4. Siano $n_1, n_2, \ldots, n_m$ interi, dove m è dispari. Sia $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ una permutazione degli interi $(1, 2, \ldots, m)$. Sia $f(x) = x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_m n_m$. Dimostrare che per due permutazioni distinte a, b, la differenza $f(a) - f(b)$ è divisibile per $m!$.

5. ABC è un triangolo. $X \in BC$ è il piede della bisettrice uscente da A, Y è la bisettrice uscente dal vertice B. $\angle BAC = 60$. $AB + BX = AY + YB$. Trovare tutti i valori possibili per l'angolo B.

6. $K > L > M > N$ sono interi positivi tali che:
$$KM + LN = (K + L - M + N)(-K + L + M + N)$$
Dimostrare che $KL + MN$ è composto.

IMO 2002

1. Ogni punto (x, y) del piano, con x, y interi non negativi e $x + y < n$, è colorato in rosso o in blu, in modo che se (x, y) è rosso e $x' \leq x, y' \leq y$, anche (x', y') è rosso. Sia A il numero di modi di scegliere n punti blu ognuno con coordinata x diversa, e B il numero di modi di scegliere n punti rossi ognuno con coordinata y diversa. Dimostrare che $A = B$.

2. La circonferenza S ha centro O e BC è un suo diametro. Sia A un punto di S tale che $\angle AOB < 120$. Sia D il punto medio dell'arco AB che non contiene C. La retta per O parallela a DA interseca AC in I. L'asse di OA interseca la circonferenza in E, F. Dimostrare che I è l'incentro del triangolo CEF.

3. Trovare tutte le coppie $m, n \geq 3$ tali che esistono infiniti interi positivi a tali che
$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$
è un intero.

4. Sia $n \geq 2$ un intero positivo, i cui divisori sono $1 = d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_k = n$. Dimostrare che $d_1 d_2 + d_2 d_3 + \ldots + d_{k-1} d_k < n^2$. Per quali n, $d_1 d_2 + d_2 d_3 + \ldots + d_{k-1} d_k$ è un divisore di n^2?

5. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che:
$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

6. Sia $n \geq 3$ un intero positivo. Siano $C_1, C_2, \ldots, C_n$ cerchi unitari nel piano, con centri $O_1, O_2, \ldots, O_n$ rispettivamente. Se nessuna retta interseca più di due cerchi, dimostrare che:
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}$$

IMO 2003

1. Sia A un sottoinsieme di $\{1, 2, \ldots, 1000000\}$ con 101 elementi. Dimostrare che esistono $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ elementi di S tali che gli insiemi
$$A_i = \{x + t_i | x \in A\} \qquad i = 1, 2, \ldots, 100$$
sono a due a due disgiunti.

2. Trovare tutte le coppie di interi positivi (a, b) tali che
$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$
è un numero intero.

3. Ogni coppia di lati opposti in un esagono convesso ha la seguente proprietà: la distanza tra i loro punti medi è $\frac{\sqrt{3}}{2}$ volte la somma delle loro lunghezze. Dimostrare che tutti gli angoli dell'esagono sono uguali.

4. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico. Siano P, Q, R le proiezioni di di D sulle rette BC, CA, AB rispettivamente. Dimostrare che $PQ = QR$ se e soltanto se le bisettrici di $\angle ABC$ e $\angle ADC$ si incontrano su AC.

5. Sia n un intero positivo e $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ numeri reali. Dimostrare che:
$$\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$$
Dimostrare che vale l'uguaglianza se e soltanto se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ formano una progressione aritmetica.

6. Sia p un numero primo. Dimostrare che esiste un primo q tale che $n^p - p$ non è un multiplo di q per ogni intero n.

IMO 2004

1. Sia ABC un triangolo acuto con $AB \neq AC$. La circonferenza con diametro BC interseca AB, AC in M, N rispettivamente. Sia O il punto medio di BC. Le bisettrici di $BAC, \angle MON$ si intersecano in R. Dimostrare che le circonferenze circoscritte a BMR e CNR hanno un punto in comune sul lato BC.

2. Trovare tutti i polinomi a coefficienti reali f tali che se a, b, c sono numeri reali che soddisfano $ab + bc + ca = 0$, allora:

$$f(a - b) + f(b - c) + f(c - a) = 2f(a + b + c)$$

3. Dato un quadrato 3×3 diviso in 9 quadratini, chiamiamo “gancio” la figura ottenuta togliendo ad esso il quadratino al centro, un quadratino a metà di un lato e un quadratino su un angolo avente un lato in comune col quadratino a metà del lato.

   Trovare tutti i rettangolo $m \times n$ che possono essere ricoperti da ganci, senza buchi o sovrapposizioni e senza che nessun gancio esca dal rettangolo.

4. Sia $n \geq 3$ un intero. Siano $t_1, t_2, \ldots, t_n$ reali positivi tali che:

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \ldots + t_n)(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n}$$

   Dimostrare che t_i, t_j, t_k sono le lunghezze dei lati di un triangolo, per ogni $1 \leq i < j < k \leq n$.

5. In un quadrilatero convesso $ABCD$, la diagonale BD non biseca nè l'angolo $\angle ABC$ nè l'angolo $\angle CDA$. Il punto P è all'interno del quadrilatero e soddisfa:

$$\angle PBC = \angle DBA \qquad \angle PDC = \angle BDA$$

   Dimostrare che $ABCD$ è ciclico se e soltanto se $AP = CP$.

6. Diciamo che un intero positivo è “alternante” se due cifre consecutive nella sua rappresentazione decimale hanno sempre parità diversa.

   Trovare tutti gli interi positivi n che hanno un multiplo alternante.

IMO 2005

1. Sui lati di un triangolo equilatero si scelgono sei punti: A_1, A_2 su BC, B_1, B_2 su CA, C_1, C_2 su AB, in modo che l'esagono convesso $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ abbia i lati uguali.

   Dimostrare che le rette A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 concorrono.

2. Sia $a_1, a_2, \ldots$ una sequenza di interi, con infiniti termini positivi e infiniti negativi. Supponiamo che per ogni n, i numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se divisi per n danno un resto diverso. Dimostrare che ogni intero appare esattamente una volta nella sequenza $a_1, a_2, \ldots$.

3. Siano x, y, z reali positivi con $xyz \geq 1$. Dimostrare che:

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0$$

4. Trovare tutti gli interi positivi relativamente primi ad ogni elemento della sequenza:

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, \ n \geq 1$$

5. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso fissato con $BC = DA$ e BC non parallela a DA. Due punti variabili E, F stanno rispettivamente sui lati BC, DA e soddisfano $BE = DF$. Le rette AC, BD si intersecano in P, le rette BD, EF si intersecano in Q, le rette EF, AC si intersecano in R.

   Dimostrare che le circonferenze circoscritte a PQR, al variare di E, F, hanno un punto in comune oltre a P.

6. In una gara matematica, in cui i partecipanti dovevano risolvere 6 problemi, ogni 2 problemi sono stati risolti da più di $\frac{2}{5}$ dei partecipanti. Inoltre, nessun partecipante ha risolto tutti i problemi. Dimostrare che c'erano almeno 2 partecipanti che hanno risolto 5 problemi ciascuno.

IMO 2006

1. Sia ABC un triangolo con incentro I. Un punto P interno al triangolo soddisfa:
$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$
Dimostrare che $AP \geq AI$, e che vale l'uguaglianza se e soltanto se $P = I$.

2. Sia P un poligono regolare con 2006 lati. Una sua diagonale è detta "buona" se divide P in due poligoni ciascuno con un numero pari di lati. Anche i lati di P sono considerati buoni.

   Supponiamo che P sia stato diviso in triangoli da 2003 diagonali, senza che due di esse si incontrino in un punto interno a P. Trovare il massimo numero di triangoli isosceli con due lati "buoni" che possono apparire in questa configurazione.

3. Trovare il più piccolo reale M tale che la disuguaglianza
$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$
è vera per tutti i numeri reali a, b, c.

4. Trovare tutte le coppie (x, y) di interi tali che
$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

5. Sia $P(x)$ un polinomio di grado $n > 1$ con coefficienti interi e k un intero positivo. Consideriamo il polinomio $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, dove compaiono k P. Dimostrare che esistono al più n interi t tali che $Q(t) = t$.

6. Assegnamo ad ogni lato b di un poligono convesso P la massima area che può avere un triangolo contenuto in P avente per lato b. Dimostrare che la somma delle aree assegnate ai lati di P è almeno 2 volte l'area di P.

IMO 2007

1. Sono dati numeri reali $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Per ogni i, $1 \leq i \leq n$, definiamo

$$d_i = \max\{a_j | 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j | i \leq j \leq n\}$$

e sia $d = \max d_i$.

   1. Dimostrare che, se $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ sono reali:

$$\max\{|x_i - a_i| | 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}$$

   2. Dimostrare che esistono reali $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ tali che nella disuguaglianza di sopra vale l'uguaglianza.

2. Consideriamo cinque punti A, B, C, D, E in modo che $ABCD$ è un parallelogramma e $BCED$ un quadrilatero ciclico. Sia l una retta per A che interseca l'interno del segmento DC in F e la retta BC in G. Supponiamo che $EF = EG = EC$. Dimostrare che l è la bisettrice dell'angolo DAB.

3. In una competizione matematica, alcuni partecipanti sono amici (l'amicizia è sempre reciproca). Un gruppo di partecipanti è detto una *clique* se sono tutti amici tra di loro. In particolare, un gruppo con meno di due partecipanti è una *clique*. Il numero di persone in una *clique* è detto la sua *grandezza*

   Sapendo che, in questa competizione, la più grande *clique* ha un numero pari di persone, dimostrare che si può dividere i partecipanti in due stanze, in modo che la grandezza della *clique* più grande tra le persone nella prima stanza è uguale alla grandezza della *clique* più grande tra le persone nella seconda stanza.

4. Nel triangolo ABC, la bisettrice dell'angolo $\angle BCA$ interseca la circonferenza circoscritta di nuovo in R, l'asse di BC in P, l'asse di AC in Q. Il punto medio di BC è K, il punto medio di AC è L. Dimostrare che i triangoli RPK e RQL hanno la stessa area.

5. Siano a, b interi positivi. Dimostrare che se $4ab - 1$ divide $(4a^2 - 1)^2$, allora $a = b$.

6. Sia n un intero positivo. Consideriamo

$$S = \{(x, y, z) | x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, x + y + z > 0$$

come un insieme di $(n+1)^3 - 1$ punti nello spazio. Trovare il più piccolo numero di piani la cui unione contiene S ma non contiene $(0, 0, 0)$.