

Cesenatico 2000

Difficoltà: ★★★★★

1. I quattro cantoni **15 punti**

La Confederazione Matematica è costituita da 4 cantoni, ciascuno con il suo capoluogo. Si vogliono collegare tra di loro i 4 capoluoghi con dei mezzi di trasporto in modo da rispettare le seguenti condizioni:

- ogni coppia di capoluoghi deve essere collegata mediante uno e solo uno dei seguenti tre mezzi: treno, autobus, aereo;
- in nessun capoluogo devono confluire due collegamenti dello stesso tipo.

In quanti modi diversi è possibile realizzare i collegamenti rispettando le due condizioni?

2. Ma quando festeggia? **15 punti**

Camillo è nato quest'anno (il 2000) martedì 29 Febbraio. In quale anno per la prima volta compirà gli anni in un martedì 29 Febbraio?

Indicare l'anno solare e non l'età di Camillo.

3. Il segmento pigro **20 punti**

Consideriamo un classico orologio digitale con due cifre per indicare le ore (da 00 a 23) e due per indicare i minuti (da 00 a 59). Ognuna delle quattro cifre viene composta illuminando opportunamente sette segmenti. Dei 28 segmenti presenti sul quadrante, ce n'è uno che in un giorno rimane acceso meno degli altri. Che ora indica l'orologio quando questo segmento si accende per la prima volta durante la giornata?

Nella risposta mettere di seguito le due cifre che indicano l'ora e le due cifre che indicano i minuti.

4. Il laghetto nel giardino **20 punti**

In un paesino della Confederazione Matematica c'è un giardino quadrato il cui lato è lungo 200 metri. Ai vertici del quadrato ci sono gli ingressi, mentre nei punti medi di ogni lato ci sono dei monumenti dedicati a grandi matematici del passato. Entrando da ogni ingresso il visitatore trova un sentiero rettilineo che conduce al più a destra tra i due monumenti posti sui lati che non concorrono all'ingresso stesso. Il quadrilatero al centro del giardino delimitato da questi quattro sentieri è totalmente ricoperto da un laghetto.

Quanti metri quadrati misura l'area del laghetto?

Si trascuri la larghezza dei sentieri.

5. Tutti i rettangoli sono bianconeri **25 punti**

Un rettangolo è formato da 15×9 quadratini bianchi. Qual è il minimo numero di quadratini che bisogna colorare di nero per fare in modo che ogni rettangolo formato da 5×3 quadratini, disposto orizzontalmente o verticalmente, totalmente contenuto nel rettangolo originario, contenga almeno un quadratino nero?

6. La Società dei Quattro Primi **25 punti**

La Società dei Quattro Primi è un'associazione di matematici la cui fondazione risale all'anno 210. I membri di questa associazione organizzano un convegno in tutti gli anni nella cui fattorizzazione compaiono esattamente quattro primi distinti (ad esempio $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, oppure $990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$).

Trovare la somma degli anni in cui si sono svolti gli ultimi due convegni.

7. Che stipendi! **25 punti**

Manolo e Michele vengono assunti lo stesso giorno in banca. Lo stipendio di Manolo è 100 euro il primo mese e aumenta di 100 euro ogni mese. Quello di Michele è di 1 euro il primo mese e raddoppia ogni mese. Nel primo mese in cui il guadagno totale (dal primo giorno di lavoro fino a quel momento) di Michele avrà superato il guadagno totale di Manolo, quanto sarà la differenza tra detti guadagni?

8. Matenigmistica **30 punti**

Chiamiamo pronunciabile una parola in cui non compaiano due o più consonanti consecutive. Quanti sono gli anagrammi pronunciabili della parola MATEMATICA?

9. Il torneo di calcio **30 punti**

In un torneo di calcio ognuna delle sei squadre partecipanti si scontra due volte con tutte le altre, con partite di andata e ritorno in cui si assegnano 3 punti per la vittoria, 1 per il pareggio e 0 per la sconfitta. Al termine del torneo la squadra della Confederazione Matematica ha totalizzato 18 punti. Quante sono tutte le possibili successioni ordinate di vittorie, pareggi e sconfitte con le quali è possibile raggiungere tale punteggio?

10. World Wide Web **35 punti**

Una rete comprende nove computer, disposti secondo un reticolo 3×3 , in cui ogni terminale è collegato a quelli adiacenti orizzontalmente o verticalmente. Ogni terminale può essere acceso o spento e due terminali accesi possono comunicare tra di loro solo se esiste un cammino che li collega fatto unicamente da tratti che hanno come estremi dei terminali accesi.

Determinare quante sono le configurazioni della rete che soddisfano le seguenti due condizioni:

- ci sono almeno due terminali accesi;
- ogni coppia di terminali accesi può comunicare.

11. Allergici allo zero **35 punti**

Quanti sono gli interi che si scrivono, sia in base 10 sia in base 9, usando 4 cifre, di cui la prima e l'ultima diverse da zero?

12. Il 9000 fatto a pezzi **40 punti**

In quanti modi si può scrivere 9000 come somma di almeno due interi positivi consecutivi? (Ad esempio per 9 si hanno 2 possibilità: $9 = 2 + 3 + 4$, $9 = 4 + 5$)

13. Piastrellando piastrellando ... **40 punti**

Gli antichi regnanti della Confederazione Matematica vivevano in uno splendido castello (tuttora magnificamente conservato), il cui salone delle feste ha la forma di un rettangolo lungo 30 metri e largo 25 metri. Il salone è pavimentato usando alternativamente piastrelle quadrate e ottagonali. Il lato dei quadrati misura 10 centimetri, mentre gli ottagoni hanno tutti gli angoli uguali, ed i lati alternativamente uguali al lato ed alla diagonale del quadrato. Ogni piastrella quadrata confina con 4 piastrelle ottagonali, e ogni piastrella ottagonale confina con 4 piastrelle quadrate e 4 ottagonali (tranne, ovviamente, sul bordo della stanza).

Le piastrelle sono disposte in modo che i lati di quelle quadrate siano paralleli ai lati del salone, e che il centro del salone coincida con il centro di una piastrella quadrata. Ovviamente in prossimità dei muri alcune piastrelle hanno dovuto essere tagliate.

Quante piastrelle quadrate intere ci sono sul pavimento?

14. Il cubo imprigionato **45 punti**

Un cubo ha tutti i vertici sugli spigoli di un ottaedro regolare di lato 10. Determinare il volume del cubo.

15. Che fine farà il 2000? **45 punti**

Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verifica l'uguaglianza

$$f((x-y)^2) = (f(x))^2 - 2xf(y) + y^2$$

per ogni coppia di numeri reali x e y .

Calcolare la somma di tutti i valori che può assumere $f(2000)$.

16. Il quinto cantone **50 punti**

Un nuovo cantone si è candidato a far parte della Confederazione Matematica: si tratta della famosissima Isola dei Cavalieri e dei Furfanti, celebrata in mille giochi matematici, e chiamata così perché i suoi 9999 abitanti sono da sempre divisi in due fazioni, quella dei Cavalieri e quella dei Furfanti. I Cavalieri dicono sempre la verità, mentre i Furfanti mentono sempre. Un nuovo governatore, inviato dall'amministrazione centrale, sa solo che sull'isola c'è almeno un Cavaliere, ma vuole il prima possibile sapere a quale fazione appartiene ogni abitante. Allora ogni giorno egli convoca un gruppo di isolani a sua scelta e chiede ad ognuno di loro quanti Furfanti ci sono in quel gruppo (sull'isola ognuno sa a quale fazione appartengono tutti gli altri), dopodiché si appunta il nome e la risposta data da ognuno dei presenti, riservandosi di elaborare in futuro queste informazioni.

Qual è il minimo numero di giorni che servono al governatore per essere sicuro di poter condurre a termine il suo programma?

17. Ma dove vanno i baricentri? **50 punti**

Si considerino tre spigoli di un parallelepipedo rettangolo a due a due senza vertici in comune e a due a due non paralleli; si prendano ora le tre rette su cui questi spigoli giacciono e si indichi con W il luogo dei baricentri dei triangoli che hanno un vertice in

ogni retta. Se il parallelepipedo ha i lati lunghi rispettivamente 3000, 4000 e 12000, qual è il raggio della più piccola sfera che contiene l'intersezione di W col parallelepipedo?

18. **$399 + 7 = 3997$** **55 punti**

Sia P il prodotto delle soluzioni reali dell'equazione

$$\sqrt{399} \cdot x^{\log_{3997} x} = x^7.$$

Calcolare le ultime quattro cifre della parte intera di P .

19. **Il gioco di fine millennio** **55 punti**

Per festeggiare la fine del millennio al Casinò della Confederazione Matematica è stato organizzato un gioco a premi. In una cesta ci sono 1000 gettoni numerati da 1001 a 2000. Il gioco funziona così: pagata la quota di partecipazione, ogni giocatore punta su un numero intero e poi estrae dalla cesta due gettoni a caso (insieme). Se la somma dei punteggi scritti sui gettoni è uguale al numero su cui il giocatore ha puntato, egli riceve un premio in lire pari al quadrato del numero su cui ha puntato, altrimenti perde la quota di partecipazione.

Su quale punteggio conviene puntare?

20. **Mancanza di spazio** **60 punti**

In un piccolo ripostiglio quadrato di 2 metri di lato vengono sistemati due tavoli rotondi, ciascuno di diametro 1 metro. Sia V il luogo geometrico costituito dai punti in cui si può venire a trovare il centro di uno dei due tavoli. Calcolare l'area di V in centimetri quadrati.

21. **I ladri sono bravi in matematica?** **60 punti**

Nicola di solito chiude la sua bicicletta con un lucchetto, per aprire il quale occorre conoscere una combinazione di quattro cifre. Nicola però ha già tanti altri numeri importanti da ricordare e molte volte rischia di dimenticarsi questa combinazione. Allora, contando sulle scarse conoscenze matematiche dei malintenzionati, ha lasciato sotto la sella un bigliettino con questa scritta:

La combinazione è data dalle ultime quattro cifre del numero

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 9997 \cdot 9999.$$

Qual è la combinazione del lucchetto di Nicola?

22. **Il record dei divisori** **60 punti**

Sia D il massimo numero di divisori che può avere un intero positivo minore di 10000. Qual è il più piccolo intero positivo con esattamente D divisori?

23. Alla ricerca del massimo perduto**65 punti**

Siano a , b e c tre interi compresi tra 1 e 9999 (estremi inclusi) che soddisfano le seguenti equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{37,5}{a+b+c} \\ \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{50}{a+b+c} \\ \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{92,5}{a+b+c} \end{array} \right.$$

Qual è il massimo valore che può assumere b ?

24. La stazione spaziale**70 punti**

La Confederazione Matematica ha deciso di mettere in orbita una stazione spaziale. Questa stazione avrà la forma di una piramide retta a base quadrata in cui vengono incastrate cinque sfere i cui centri sono i vertici della piramide. Sapendo che il lato della base della piramide misura 30 metri, l'altezza della piramide misura 15 metri, il raggio di tutte le sfere misura 5 metri, si determini (in metri cubi) il volume della struttura.